



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN  
Vienna University of Technology

# Dynamische Systeme in Unterricht und Praxis

**Günther Karigl und Gerhard Dorfer**

Im Rahmen der AG-Tagung AHS Mathematik  
Bildungshaus St. Hippolyt, St. Pölten, 25. November 2010

## Inhaltsübersicht

1. Differentialgleichungen
2. Systeme von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung
3. Analogien bei Differenzengleichungen
4. Qualitative Methoden für Differentialgleichungen
5. Simulation von Differentialgleichungen
6. Beispiele aus der mathematischen Ökologie
7. Beispiele aus der Wirtschaftsmathematik



## 1. Differentialgleichungen

Wir betrachten Prozesse, welche kontinuierlich ablaufen, wie z.B. Naturvorgänge, technische Abläufe, chemische Reaktionen, wirtschaftliche Abläufe, usw. Die Beschreibung derartiger Prozesse erfolgt vielfach mittels Differentialgleichungen, das sind Gleichungen für Funktionen in einer oder mehreren Variablen, welche neben den gesuchten Funktionen auch Ableitungen dieser Funktionen enthalten.

Beispiel 1 (Radioaktiver Zerfall):

Bezeichne  $x(t)$  die zum Zeitpunkt  $t$  vorhandene Menge eines radioaktiven Stoffes. Zerfällt dieser Stoff mit einer Zerfallskonstante  $k$ ,  $k > 0$ , so genügt  $x(t)$  der Gleichung

$$x'(t) = -k \cdot x(t),$$

d.h. die zeitliche Änderung  $x'(t) \approx \frac{x(t+1) - x(t)}{t+1-t} = x(t+1) - x(t)$  von  $x(t)$  ist proportional zur

momentan vorhandenen Stoffmenge  $x(t)$  mit Proportionalitätsfaktor  $-k$ . Zur Lösung dieser Gleichung geht man so vor: Man dividiert die Gleichung durch  $x(t)$  und anschließend integriert man beide Seiten nach der Variable  $t$  und erhält  $\int \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \int -k dt$ . Substituiert

man auf der linken Seite  $x(t)$  und beachtet  $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ , so erhält man  $\int \frac{1}{x} dx = \int -k dt$  und es

folgt  $\ln|x(t)| = -kt + C$  mit Integrationskonstante  $C \in \mathbb{R}$ . Durch Entlogarithmieren erhält man schließlich  $x(t) = C_1 e^{-kt}$  mit  $C_1 = \pm e^C \in \mathbb{R}$  beliebig (allgemeine Lösung). Ist zusätzlich bekannt, dass  $x(0) = 5$  (Anfangsbedingung), so erhält man durch Einsetzen von  $t = 0$  in die allgemeine Lösung  $5 = C_1$  und damit die spezielle Lösung  $x(t) = 5e^{-kt}$ .

Beispiel 2 (Logistisches Wachstum):

Es handelt sich hierbei um ein grundlegendes Wachstumsmodell in der Biologie (Zellwachstum, Populationswachstum), aber auch in der Wirtschaft (Entwicklung eines Marktanteils). Sei  $N(t)$  die Populationsgröße in Abhängigkeit von der Zeit,  $r$  eine Wachstumsrate und  $K$  eine Sättigungskonstante. Die Gleichung für das logistische Wachstum lautet dann

$$N'(t) = rN(1 - N/K).$$

Das ist eine nicht-lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für  $N(t)$  mit der Lösung

$$N = 0 \text{ oder } N(t) = \frac{K}{1 + Ce^{-rt}}, C \in \mathbb{R}$$

(wie man durch Einsetzen bestätigt). Dabei kann die Konstante  $C$  wieder aus einer Anfangsbedingung, etwa  $N(0) = N_0$ , ermittelt werden. Man erhält  $C = (K - N_0)/N_0$  und damit die Lösung

$$N(t) = \frac{K}{1 + \frac{K - N_0}{N_0} e^{-rt}}.$$

Beispiel 3 (Freier Fall):

Sei  $s(t)$  der Weg in Abhängigkeit von der Zeit und  $g$  die Erdbeschleunigung ( $9,81 \text{ ms}^{-2}$ ). Dann wird die Bewegung beim freien Fall (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes) beschrieben durch die Gleichung

$$s''(t) = g,$$

das ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung für  $s(t)$ . Durch Integration erhält man  $s'(t) = gt + C_1$  und weiter  $s(t) = (g/2)t^2 + C_1t + C_2$  mit  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Letztere Gleichung stellt die sogenannte allgemeine Lösung der Differentialgleichung dar. Die beiden Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  können durch Vorgabe von Anfangsbedingungen, etwa  $s(0) = s_0$  und  $s'(0) = v_0$  bestimmt werden:  $C_1 = v_0$ ,  $C_2 = s_0$ . Somit erhält man als spezielle Lösung das Weg-Zeit-Gesetz  $s(t) = (g/2)t^2 + v_0t + s_0$ .

Beispiel 4 (Harmonischer Oszillator):

Eine Masse  $m$  sei an einer elastischen Feder aufgehängt. Wird die Masse aus dem Gleichgewicht ausgelenkt, so beginnt ein Schwingungsvorgang der Masse um die Gleichgewichtslage. Bezeichne  $x(t)$  die Auslenkung der Masse aus der Gleichgewichtslage zum Zeitpunkt  $t$ .

Gehen wir der Einfachheit halber zunächst einmal von einem (idealisierten) reibungsfreien System aus, dann genügt die Funktion  $x(t)$  der Differentialgleichung

$$m \cdot x''(t) = -k \cdot x(t).$$

Das heißt, dass die zum Zeitpunkt  $t$  durch die Feder auf die Masse wirkende Kraft (= Masse · Beschleunigung auf der linken Seite der Gleichung) proportional zur momentanen Auslenkung  $x(t)$  ist, wobei der Proportionalitätsfaktor  $k$  ( $k$  heißt auch Federkonstante, sie ist umso größer je steifer die Feder) positiv ist. Das negative Vorzeichen auf der rechten Seite kommt daher, dass die Feder stets der Auslenkung entgegen wirkt: Ist beispielsweise die Feder oben verankert und die Masse unter die Gleichgewichtslage hin ausgelenkt (Feder gedehnt), so zieht die Feder die Masse nach oben; ist die Feder nach oben ausgelenkt (Feder zusammengedrückt), so drückt die Feder die Masse nach unten.

Wie man durch Einsetzen in die Differentialgleichung leicht nachrechnet, sind alle Funktionen

$$x(t) = C_1 \sin(\alpha t) + C_2 \cos(\alpha t)$$

Lösungen, wobei  $\alpha = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , und  $C_1, C_2$  beliebige Konstanten (freie Parameter) in  $\mathbb{R}$  sind.

Beachtet man, dass für ein beliebiges Paar an freien Konstanten ( $C_1, C_2$ ) immer Größen  $C$  und  $\varphi$  existieren mit

$$C_1 = C \cos(\varphi), \quad C_2 = C \sin(\varphi)$$

(vergleiche die Polardarstellung der komplexen Zahl  $C_1 + jC_2$ ), so erhält man alternativ dazu eine andere Darstellung dieser Lösungen in der Form

$$x(t) = C \cos(\varphi) \sin(\alpha t) + C \sin(\varphi) \cos(\alpha t) = C \sin(\alpha t + \varphi).$$

Aus dieser zweiten Darstellung erkennt man, dass all diese Lösungen (um den Faktor  $\varphi$  versetzte) Sinus-Schwingungen darstellen ( $\varphi$  heißt auch Phasenverschiebung).  $C$  ist hierbei die Amplitude, d.h. die Maximalauslenkung der Schwingung. Die Schwingungsdauer ist

gegeben durch  $\frac{2\pi}{\alpha} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  (je steifer die Feder, desto größer  $k$ , desto kleiner die Schwingungsdauer, desto größer die Frequenz). In diesem Zusammenhang nennt man die schwingende Masse einen harmonischen Oszillator und die Lösungsfunktionen (Sinus-/Cosinus-Funktionen) beschreiben harmonische Schwingungen.

Die beiden Darstellungen der Lösungen sind gleichwertig: Im ersten Fall sind die beiden freien Parameter gegeben durch  $C_1$  und  $C_2$ , im zweiten Fall spielen  $C$  und  $\varphi$  diese Rolle. Entscheidend ist, dass die Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung durch zwei freie Parameter an zwei Anfangsbedingungen, z.B. an  $x(0)$ , die Größe der Auslenkung zum Zeitpunkt 0, und an  $x'(0)$ , die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt 0, angepasst werden kann. Konkretes Beispiel: Ist  $x(0) = 1$  und  $x'(0) = 0$  vorgegeben, so führt das auf die Parameterwerte  $C_1 = 0$  und  $C_2 = 1$  (bzw. in der zweiten Darstellung auf  $C = 1$  und  $\varphi = \pi/2$ ), also erhält man die Lösung  $x(t) = \cos(\alpha t)$ .

### (i) Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Eine der wichtigsten Differentialgleichungstypen ist die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung, das ist eine Gleichung der Form

$$y' + a(x)y = \begin{cases} 0 & \text{homogenen Gleichung} \\ s(x) & \text{inhomogene Gleichung} \end{cases}$$

Dabei sind  $a(x)$  und  $s(x)$  beliebige Funktionen in  $x$ ,  $s(x)$  heißt **Störfunktion**. Gesucht sind alle Funktionen  $y(x)$ , die dieser Gleichung genügen (in diesem Fall spricht man von der **allgemeinen Lösung**), oder eine **spezielle Lösung**  $y(x)$ , die zusätzlich einer sogenannten Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$  genügt. Falls die Störfunktion verschwindet, spricht man von einer **homogenen**, sonst von einer **inhomogenen** Gleichung. Grundlegend für die Lösung linearer Differentialgleichungen ist der folgende

**Satz:** Die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung  $y' + a(x)y = s(x)$  ist gegeben durch  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ , wo  $y_h(x)$  die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung  $y' + a(x)y = 0$  und  $y_p(x)$  eine beliebige partikuläre Lösung der gegebenen inhomogenen Gleichung ist.

Damit ergibt sich der folgende Lösungsweg für lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung:

1. Lösung der homogenen Gleichung durch „Trennung der Variablen“
2. Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung durch „Variation der Konstanten“
3. Ermittlung der Lösungsgesamtheit gemäß  $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ .

Ad 1.: Die homogene Gleichung lautet  $y' + a(x)y = 0$ . Umformung und anschließende Integration führt zu

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y} &= -a(x) \\ \ln|y| &= -\int a(x)dx + C_0 \\ y_h(x) &= Ce^{-\int a(x)dx}\end{aligned}$$

mit  $C \in \mathbb{R}$ . In der Praxis rechnet man folgendermaßen

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -a(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int a(x)dx, \quad \text{usw.}$$

D.h., es werden die beiden Variablen  $x$  und  $y$  formal getrennt und beide Seiten der Gleichung – einmal nach  $x$  und einmal nach  $y$  – integriert. Aus diesem Grund spricht man von der Methode der **Trennung der Variablen**.

Ad 2.: Zur Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung  $y' + a(x)y = s(x)$  macht man den Ansatz

$$y_p(x) = C(x)e^{-\int a(x)dx},$$

d.h., man ersetzt die Konstante  $C$  in der homogenen Lösung gemäß 1. durch eine zunächst noch unbekannte Funktion  $C(x)$  (**Variation der Konstanten**). Durch Einsetzen von  $y_p(x)$  und  $y_p'(x)$  in die inhomogene Gleichung wird  $C(x)$  ermittelt.

Beispiel: Gesucht ist die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y' - \frac{1-x}{x}y = 4x^2.$$

Wir lösen zunächst die zugehörige homogene Gleichung durch Trennung der Variablen gemäß 1. und erhalten

$$\begin{aligned}y' - \frac{1-x}{x}y &= 0 \\ \frac{dy}{y} &= \frac{1-x}{x}dx \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \left(\frac{1}{x} - 1\right)dx \\ \ln|y| &= \ln|x| - x + \ln C \\ y_h(x) &= Cxe^{-x}\end{aligned}$$

mit  $C \in \mathbb{R}$ . Variation der Konstanten gemäß 2. führt zum Ansatz  $y_p(x) = C(x)xe^{-x}$  und Einsetzen in die inhomogene Gleichung liefert

$$\begin{aligned}y' - \frac{1-x}{x}y &= 4x^2 \\ C'(x)xe^{-x} + C(x)e^{-x} - C(x)xe^{-x} - \frac{1-x}{x}C(x)xe^{-x} &= 4x^2 \\ C'(x) &= 4xe^x \\ C(x) &= \int 4xe^x dx = 4e^x(x-1)\end{aligned}$$

Damit lautet die partikuläre Lösung  $y_p(x) = C(x)xe^{-x} = 4x(x-1)$ . Addition von  $y_h$  und  $y_p$  gemäß 3. ergibt schließlich  $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Cxe^{-x} + 4(x^2 - x)$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , das ist die allgemeine Lösung.

Die Lösung der Anfangswertaufgabe  $y(1) = 1$ , erhält man, indem man diesen Anfangswert in die allgemeine Lösung einsetzt:

$$y(1) = C \cdot 1 \cdot e^{-1} + 4(1-1) = 1, \text{ also } C = e.$$

Damit erhält man die spezielle Lösung  $y(x) = xe^{1-x} + 4(x^2 - x)$ .

## (ii) Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung (mit konstanten Koeffizienten)

Wir behandeln in diesem Abschnitt Differentialgleichungen 2. Ordnung der Form

$$y'' + ay' + by = \begin{cases} 0 & \text{homogene Gleichung} \\ s(x) & \text{inhomogene Gleichung} \end{cases},$$

wo  $a$  und  $b$  konstante Koeffizienten und  $s(x)$  eine Störfunktion sind. Dabei handelt es sich um lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung. Je nachdem, ob die Störfunktion verschwindet oder nicht, nennt man die Gleichung wieder homogen bzw. inhomogen. Wie stets bei linearen Differentialgleichungen gilt auch hier für die allgemeine Lösung

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

wo  $y_h(x)$  die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und  $y_p(x)$  eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung bezeichnet. Dementsprechend gliedert sich der Lösungsweg bei linearen Gleichungen 2. Ordnung in dieselben Schritte wie bei linearen Gleichungen 1. Ordnung, die einzelnen Schritte selbst unterscheiden sich jedoch grundlegend.

### 1. Bestimmung der homogenen Lösung $y_h(x)$ :

Wir betrachten die homogene Gleichung  $y'' + ay' + by = 0$  und machen den Exponentialansatz  $y_h(x) = e^{\lambda x}$  mit dem Parameter  $\lambda$ . Zur Bestimmung von  $\lambda$  setzen wir in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b &= 0 \end{aligned}$$

Somit genügt  $\lambda$  einer quadratischen Gleichung, der sogenannten charakteristischen Gleichung. Deren Lösungen seien  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , die sogenannten charakteristischen Wurzeln der Differentialgleichung. Offensichtlich sind dann  $y(x) = e^{\lambda_1 x}$  und  $y(x) = e^{\lambda_2 x}$  Lösungen der homogenen Differentialgleichung. Je nachdem, ob  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  reelle oder komplexe Zahlen sind, lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung wie folgt:

Satz: Sind  $\lambda_1, \lambda_2$  die Lösungen der charakteristischen Gleichung  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ , dann ist die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung  $y'' + ay' + by = 0$  gegeben durch

$$y_h(x) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ reell} \\ e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) & \lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta \text{ konjugiert komplex} \\ (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x} & \lambda_1 = \lambda_2 \text{ reell} \end{cases}$$

mit  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Beispiel (Gedämpfte Schwingung):

In der Folge gelten die gleichen Bezeichnungen wie beim Beispiel zum harmonischen Oszillator. Da in der Praxis die Masse  $m$  nicht reibungsfrei schwingen kann und ein gewisser Teil der Bewegungsenergie in Wärme umgewandelt wird, betrachten wir jetzt den Fall einer gedämpften Schwingung. Hier genügt die Funktion  $x(t)$ , die die Auslenkung der Masse aus dem Gleichgewicht zum Zeitpunkt  $t$  beschreibt der Differentialgleichung

$$m \cdot x''(t) + r \cdot x'(t) + k \cdot x(t) = 0,$$

wobei die Größe  $r > 0$  den Reibungskoeffizienten darstellt. (Der Fall  $r = 0$  ist der ungedämpfte Fall, der harmonische Oszillator.) Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet:

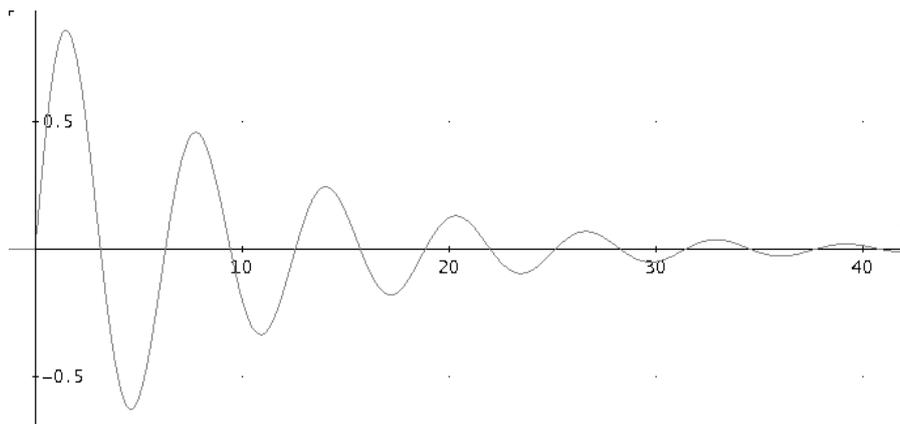
$$m\lambda^2 + r\lambda + k = 0$$

In Abhängigkeit der Diskriminante  $D = r^2 - 4mk$  muß man dem vorigen Satz gemäß drei Fälle unterscheiden:

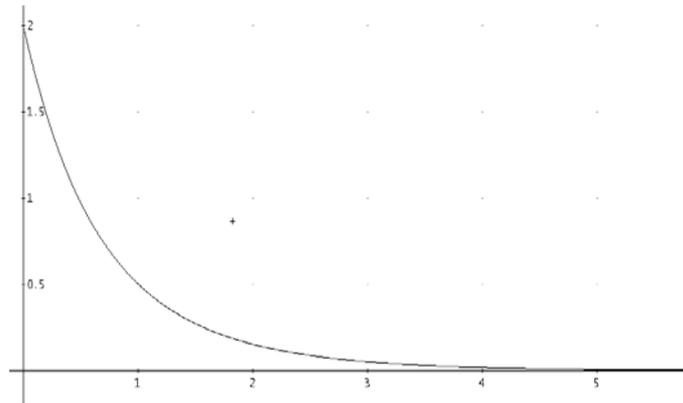
(i)  $D < 0$  (Abklingende Schwingung): Dies ist der Fall einer vergleichsweise kleinen Dämpfung  $r$ . Hier sind die beiden Lösungen  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$  der charakteristischen Gleichung zueinander konjugiert komplex und wir erhalten sogenannte abklingende Schwingungen als Lösungen der Differentialgleichung:

$$x(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$$

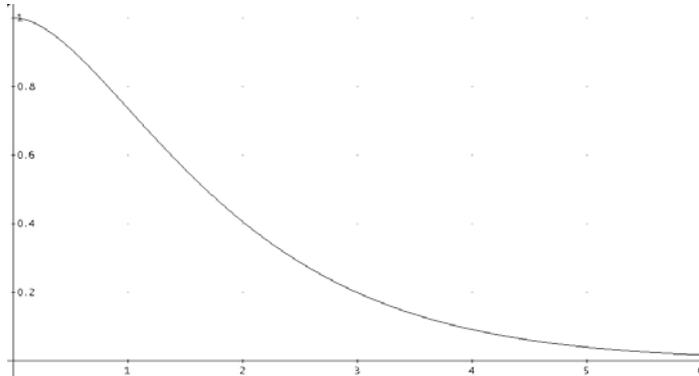
Dabei ist  $\alpha = -r/2m < 0$  und  $\beta = \frac{1}{2m} \sqrt{-D}$ .



(ii)  $D > 0$  (Aperiodischer Fall): In diesem Fall ist die Dämpfung so groß, dass die Masse nicht mehr in einen Schwingungszustand versetzt wird, sondern lediglich in die Gleichgewichtslage gezogen wird. Die beiden Lösungen  $\lambda_{1,2}$  der charakteristischen Gleichung sind dabei zwei voneinander verschiedene negative reelle Zahlen und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung hat die Gestalt  $x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$ .



(iii)  $D = 0$  (Aperiodischer Grenzfall): Vom Erscheinungsbild her ist dieser Fall dem aperiodischen Fall ganz ähnlich. Die allgemeine Lösung hat die Form  $x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda_1 t}$  mit  $\lambda_1 = \lambda_2$  negativ.



## 2. Bestimmung der partikulären Lösung $y_p(x)$ :

Partikuläre Lösungen können, in Abhängigkeit von der jeweiligen Störfunktion, vielfach mit der Methode des unbestimmten Ansatzes gefunden werden. Ist z.B. die Störfunktion von der Form

$$s(x) = (a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k) e^{rx}$$

(darunter fallen alle konstanten, linearen, quadratischen Störfunktionen sowie alle Exponentialfunktionen), dann führt eine Versuchslösung mit dem Ansatz

$$y_p(x) = (A_0 + A_1 x + \dots + A_k x^k) e^{rx}$$

mit unbestimmten Koeffizienten  $A_0, \dots, A_k$  zu einer partikulären Lösung. Zusatz: Ist ein Summand in der Versuchslösung schon Lösung der homogenen Gleichung, so ist der gesamte Lösungsansatz mit  $x$  zu multiplizieren; diese Vorgangsweise ist gegebenenfalls zu wiederholen.

Beispiel: Gesucht ist die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 2x - 3.$$

Wir bestimmen zunächst die Lösung der homogenen Gleichung  $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0$  gemäß 1. und betrachten dazu die charakteristische Gleichung  $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$  mit den Wurzeln  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = -2$ . Folglich lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Die Störfunktion  $s(x) = 2x - 3$  der inhomogenen Gleichung ist linear und fällt somit in die Klasse der unter 2. angegebenen Funktionen ( $a_0 = -3$ ,  $a_1 = 2$ ,  $r = 0$ ). Daraus ergibt sich für die Versuchslösung der Ansatz  $y_p(x) = A_0 + A_1x$  mit unbestimmten Koeffizienten  $A_0$ ,  $A_1$ . Wir bilden die Ableitungen  $y_p'(x) = A_1$  und  $y_p''(x) = 0$  und setzen in die inhomogene Gleichung ein:

$$\begin{aligned}y''(x) + y'(x) - 2y(x) &= 2x - 3 \\A_1 - 2(A_0 + A_1x) &= 2x - 3 \\-2A_1x + (A_1 - 2A_0) &= 2x - 3\end{aligned}$$

Ein Vergleich der Koeffizienten der jeweiligen linearen und konstanten Glieder führt auf  $-2A_1 = 2$  und  $A_1 - 2A_0 = -3$ , also  $A_1 = -1$  und  $A_0 = 1$ . Damit folgt die partikuläre Lösung  $y_p(x) = 1 - x$  und schließlich

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^x + C_2e^{-2x} + 1 - x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

die gesuchte allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung.

Auch für andere Störfunktionen existieren entsprechende unbestimmte Ansätze, die in der einschlägigen Literatur beschrieben sind. Wir wollen ein weiteres Beispiel betrachten, bei dem die Störfunktion eine Winkelfunktion ist.

Beispiel (Angeregte Schwingung ohne Reibung):

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x''(t) + x(t) = \sin(\gamma t).$$

Diese Gleichung kann man auffassen als die Beschreibung eines ohne Reibung schwingenden Systems (Masse  $m=1$ , Federkonstante  $k=1$ ), welches mit einem Erreger gekoppelt wird, der eine periodische Schwingung ausführt, d.h. am Punkt, an dem die Feder aufgehängt ist, wirkt die Kraft  $\sin(\gamma t)$ ,  $\gamma > 0$ .

Wieder bestimmen wir zunächst die Lösung der homogenen Gleichung  $x'' + x = 0$  gemäß 1. und betrachten dazu die charakteristische Gleichung  $\lambda^2 + 1 = 0$  mit den Wurzeln  $\lambda_1 = j$  und  $\lambda_2 = -j$ . Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$x_h(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t).$$

(vergleiche mit dem harmonischen Oszillator).

Für die Ermittlung der Lösung der inhomogenen Gleichung müssen 2 Fälle unterschieden werden:

(i)  $\gamma \neq 1$ : In diesem Fall ist die Störfunktion  $s(t) = \sin(\gamma t)$  nicht in der homogenen Lösung  $x_h(t)$  enthalten und wir arbeiten mit der Versuchslösung  $x_p(t) = A_0 \cos(\gamma t) + A_1 \sin(\gamma t)$ . Ableiten ergibt  $x_p'(t) = -A_0 \gamma \sin(\gamma t) + A_1 \gamma \cos(\gamma t)$ ,  $x_p''(t) = -A_0 \gamma^2 \cos(\gamma t) - A_1 \gamma^2 \sin(\gamma t)$ , und Einsetzen in die inhomogene Gleichung führt zu:

$$\begin{aligned}x'' + x &= \sin(\gamma t) \\A_0(-\gamma^2 + 1) \cos(\gamma t) + A_1(-\gamma^2 + 1) \sin(\gamma t) &= \sin(\gamma t).\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich bei den Cosinus- und Sinus-Termen führt zu  $A_0 = 0$  und  $A_1 = 1/(1 - \gamma^2)$ . Also ist eine partikuläre Lösung gegeben durch  $x_p(t) = 1/(1 - \gamma^2) \sin(\gamma t)$  und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet gemäß 3.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) + 1/(1-\gamma^2) \sin(\gamma t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii)  $\gamma = 1$ : In diesem Fall ist die Störfunktion  $s(t) = \sin(t)$  in der homogenen Lösung  $x_h(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$  enthalten ( $C_1 = 0, C_2 = 1$ ). Daher muß beim unbestimmten Ansatz im Vergleich zu Fall (i) eine Multiplikation mit der unabhängigen Variable  $t$  vornehmen (vgl. mit dem „Zusatz“ beim unbestimmten Ansatz):

$$x_p(t) = A_0 \cdot t \cdot \cos(t) + A_1 \cdot t \cdot \sin(t)$$

Ableiten ergibt:

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= (A_0 + A_1 t) \cos(t) + (-A_0 t + A_1) \sin(t), \\ x_p''(t) &= (2A_1 - A_0 t) \cos(t) + (-2A_0 - A_1 t) \sin(t). \end{aligned}$$

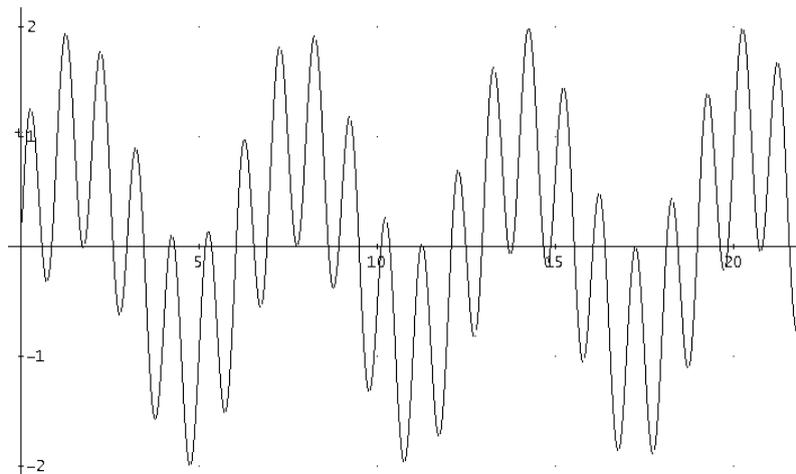
Einsetzen in die inhomogene Gleichung führt zu:

$$\begin{aligned} x'' + x &= \sin(t), \\ 2A_1 \cos(t) - 2A_0 \sin(t) &= \sin(t). \end{aligned}$$

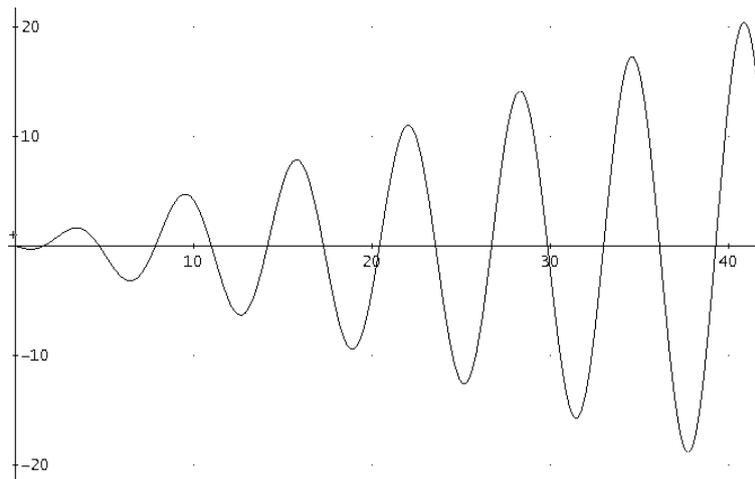
Koeffizientenvergleich liefert  $A_1 = 0, A_0 = -1/2$ , damit  $x_p(t) = (-1/2) \cdot t \cdot \cos(t)$  und als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) - (1/2) \cdot t \cdot \cos(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Der wesentliche Unterschied zwischen Fall (i) und (ii) ist, dass bei (i) alle Lösungen periodisch oder fast-periodisch sind und damit die Auslenkungen beschränkt bleiben:

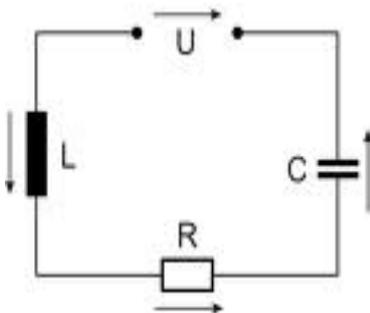


während im Fall (ii) die Auslenkungen im Laufe der Zeit immer größer werden und unbeschränkt sind:



Der Fall (ii) heißt auch Resonanzfall. Resonanz tritt ein, wenn das Erregersystem (über die Störfunktion) mit der gleichen Frequenz schwingt wie das nicht angeregte System (homogene Lösung). Die Frequenz der homogenen Lösungen heißt Eigenfrequenz des Systems (im Beispiel: Frequenz =  $1/(2\pi)$ ). D.h. im Resonanzfall ist Erregerfrequenz gleich Eigenfrequenz und die Schwingung schaukelt sich, wenn keine Dämpfung vorliegt, immer stärker auf, evtl. bis zur Zerstörung des Systems (Resonanzkatastrophe).

Verwandtes Beispiel (Schwingkreis mit gekoppeltem Erregerkreis):



Ein Kondensator mit Kapazität  $C$  sei über den Ohmschen Widerstand  $R$  und einer Spule mit Induktivität  $L$  in Serie geschaltet und zu einem Schwingkreis geschlossen. Dieser Schwingkreis sei mit einem Erregerkreis gekoppelt, der eine zeitlich periodische Spannung  $U_0 \cos(\omega t)$  überträgt. Für die zum Zeitpunkt  $t$  am Kondensator herrschende Spannung  $U(t)$  gilt die Differentialgleichung

$$LU''(t) + RU'(t) + U(t)/C = U_0 \cos(\omega t)/C.$$

Man bestimme  $U(t)$ .

## 2. Systeme von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung

Im Folgenden wollen wir exemplarisch aufzeigen, wie man Systeme von linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung auf eine einzelne Differentialgleichung höherer Ordnung zurückführen kann. Wir betrachten folgendes Beispiel aus der Reaktionskinetik in der Chemie.

Beispiel: An einer chemischen Reaktion seien die drei Stoffe A, B und C beteiligt. Bei dieser Reaktion laufen hintereinander die umkehrbaren Teilreaktionen  $A \leftrightarrow B$  und  $B \leftrightarrow C$  ab, wobei alle Teilreaktionen von erster Ordnung seien. Unter der Voraussetzung, dass die Ausgangsmenge von A 1 Mol beträgt (B und C sind am Anfang nicht vorhanden), berechne man die zum Zeitpunkt  $t$  vorhandenen Stoffmengen für einen beliebigen Zeitpunkt  $t$ .

Bezeichnet  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $z(t)$  die Stoffmengen von A, B und C zum Zeitpunkt  $t$ , und sind  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  und  $k_4$  die (positiven) Geschwindigkeitskonstanten der Teilreaktionen  $A \rightarrow B$ ,  $B \rightarrow A$ ,  $C \rightarrow D$  und  $D \rightarrow C$ , so erhalten wir folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}x'(t) &= -k_1x(t) + k_2y(t) \\y'(t) &= k_1x(t) - k_2y(t) - k_3y(t) + k_4z(t) \\z'(t) &= k_3y(t) - k_4z(t)\end{aligned}$$

Addiert man diese drei Gleichungen, so erhält man  $x'(t) + y'(t) + z'(t) = 0$ , folglich ist  $x(t) + y(t) + z(t) = C$  eine Konstante (Massenerhaltung). Wegen  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 0$  und  $z(0) = 0$  impliziert das  $x(t) + y(t) + z(t) = 1$ , und wir können  $z(t) = 1 - x(t) - y(t)$  in der zweiten Gleichung einsetzen und die dritte Gleichung weglassen. So gelangen wir zum System

$$\begin{aligned}x'(t) &= -k_1x(t) + k_2y(t) \\y'(t) &= (k_1 - k_4)x(t) - (k_2 + k_3 + k_4)y(t) + k_4\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung kann man  $y(t) = (1/k_2)x'(t) + (k_1/k_2)x(t)$  ausrechnen und das in die zweite Gleichung einsetzen. Nach kurzer Rechnung erhält man

$$x''(t) + (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)x'(t) + (k_1k_3 + k_1k_4 + k_2k_4)x(t) = k_2k_4$$

eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für  $x(t)$ . Diese Gleichung kann wie in Abschnitt 1 angegeben lösen. Bezeichnen wir zur Abkürzung  $k_1 + k_2 + k_3 + k_4$  mit  $a$  und  $k_1k_3 + k_1k_4 + k_2k_4$  mit  $b$ , so lautet die zugehörige charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung  $D = a^2 - 4b$  lässt sich darstellen in der Form

$$D = (k_1 + k_2 - k_3 - k_4)^2 + 4k_2k_3,$$

woraus  $D > 0$  folgt. Bezeichnet  $\lambda_{1/2} = (-a \pm \sqrt{D})/2$  die beiden (voneinander verschiedenen) negativen Lösungen der charakteristischen Gleichung, so lautet die homogene Lösung

$$x_h(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}$$

Da die Störfunktion  $k_2k_4$  konstant ist, sieht man, dass es mit  $x_p(t) = \frac{k_2k_4}{b}$  eine konstante partikuläre Lösung gibt. Daraus folgt, dass die allgemeine Lösung die Gestalt

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t} + \frac{k_2k_4}{b}$$

mit  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  hat.

Bestimmung der Konstanten  $C_1$  und  $C_2$ : Aufgrund der Anfangsbedingung gilt  $x(0) = 1$  und  $y(0) = 0$ . Setzt man das in die erste Gleichung des Differentialgleichungssystems ein, so erhält man  $x'(0) = -k_1$ . Mit den Bedingungen  $x(0) = 1$  und  $x'(0) = -k_1$  kann dann die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  bestimmen und erhält nach kurzer Rechnung

$$C_1 = \frac{k_1 + \lambda_2(1 - \frac{k_2 k_4}{b})}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad C_2 = -\frac{k_1 + \lambda_1(1 - \frac{k_2 k_4}{b})}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Da wir im Zuge der Rechnung schon die Darstellung  $y(t) = (1/k_2)x'(t) + (k_1/k_2)x(t)$  erhalten haben, können wir die bereits berechnete Lösung für  $x(t)$  hier einsetzen und gelangen nach einigen Umformungen zu

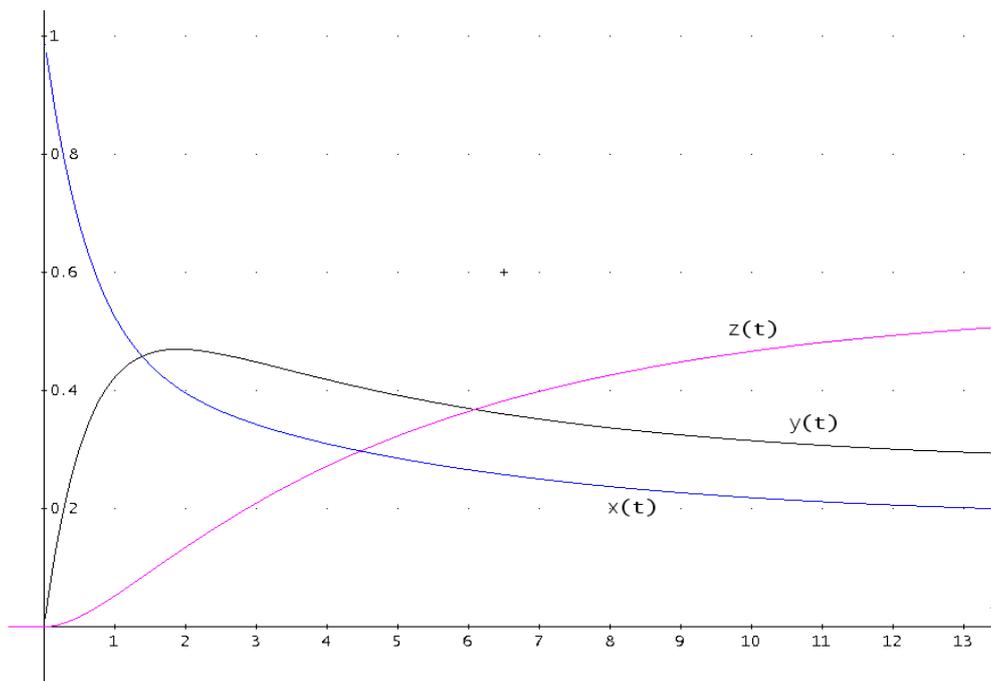
$$y(t) = \frac{1}{k_2}(C_1(\lambda_1 + k_1)e^{\lambda_1 t} + C_2(\lambda_2 + k_1)e^{\lambda_2 t}) + \frac{k_1 k_4}{b}.$$

Setzt man die Lösungen für  $x(t)$  und  $y(t)$  in die Gleichung  $z(t) = 1 - x(t) - y(t)$  ein, so bekommt man auch die Darstellung für  $z$  als Funktion in  $t$ .

Abschließend sei noch bemerkt, dass man für  $t \rightarrow \infty$  folgende Grenzwerte erhält:

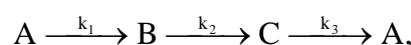
$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{k_2 k_4}{b}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{k_1 k_4}{b}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \frac{k_1 k_3}{b}.$$

Das liegt daran, dass die Werte für  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  negativ sind und heißt, dass sich bei dieser Reaktion à la longue ein Gleichgewicht für die Stoffmengen von A, B und C einstellt. Die Graphik gibt den Fall  $k_1 = 0.9$ ,  $k_2 = 0.6$ ,  $k_3 = 0.2$  und  $k_4 = 0.1$  wieder.



#### Verwandtes Beispiel (Zyklische Reaktion):

Bei einer zyklischen Reaktion dreier Stoffe A, B und C,



wobei alle Teilreaktionen von erster Ordnung sind und  $k_i$  die jeweilige Geschwindigkeitskonstante bezeichnet ( $i = 1, 2, 3$ ), berechne man die zum Zeitpunkt  $t$  vorhandenen Stoffmengen von A, B und C.

### 3. Analogien bei Differenzgleichungen

Bei einer Differenzgleichung ist im Unterschied zu einer Differentialgleichung die unabhängige Variable  $t$  eine diskrete Größe, die üblicherweise die ganzzahligen Werte  $t = 0, 1, 2, \dots$  annimmt. Eine von  $t$  abhängige Größe  $x(t)$  wird dann meist als Folge  $(x_t)_{t \in \mathbb{N}}$  geschrieben. Beim Lösen einer Differenzgleichung geht es darum, z.B. alle Folgen (oder eine spezielle Folge  $(x_t)_{t \in \mathbb{N}}$  zu einer Anfangsbedingung) anzugeben, die einer gegebenen Rekursionsgleichung genügt. Eine Rekursionsgleichung der Ordnung  $k$  stellt eine Beziehung zwischen  $x_t$  und den Vorgängerwerten  $x_{t-1}, \dots, x_{t-k}$  für beliebiges  $t \geq k$  her. Beim Lösen von Differenzgleichungen (insbesondere von linearen) gibt es zahlreiche Analogien zum Lösen von (linearen) Differentialgleichungen. Auch hier beschränken wir uns auf die Diskussion eines Beispiels.

Beispiel (Fibonacci-Folge):

Gesucht ist die Lösung der Rekursion  $x_t = x_{t-1} + x_{t-2}$ ,  $t \geq 2$ , die der Anfangsbedingung  $x_0 = 1$  und  $x_1 = 1$  genügt.

Es stellt sich heraus, dass Folgen der Gestalt  $x_t = \lambda^t$  Lösungen von linearen Rekursionen mit konstanten Koeffizienten sein können. Daher setzt man den Ansatz  $x_t = \lambda^t$  mit unbestimmtem  $\lambda$  in die Rekursion ein und erhält die charakteristische Gleichung  $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ . Die Lösungen dieser Gleichung lauten  $\lambda_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  und wir erhalten die beiden Lösungen  $x_t^{(1)} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^t$  und  $x_t^{(2)} = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^t$ . Da jedes Vielfache einer Lösung der Rekursion und die Summe von zwei Lösungen ebenfalls Lösung der Rekursion sind, gelangen wir zu Lösungen der Form  $x_t = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^t + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^t$  mit Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ . Setzt man die Anfangsbedingung  $x_0 = 1$  und  $x_1 = 1$  ein, dann erhält man  $C_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ ,  $C_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ , und damit  $x_t = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{t+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{t+1} \right]$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ , eine explizite Darstellung der Fibonacci-Folge.

## 4 Qualitative Methoden für Differentialgleichungen

Während für lineare Differentialgleichungen, insbesondere für solche mit konstanten Koeffizienten, eine gut ausgebaute Theorie für das Auffinden von Lösungen existiert, bleiben **quantitative Methoden** bei nichtlinearen Differentialgleichungen vielfach auch Sonderfälle beschränkt. Lösungen sind selbst bei einfachen nichtlinearen Differentialgleichungen oft nicht mehr möglich. An ihrer Stelle können **qualitative Methoden** zum Einsatz kommen.

In diesem Abschnitt betrachten wir Differentialgleichungen der Form

$$y' = f(y)$$

für  $y = y(t)$ , wo  $f$  eine von  $t$  unabhängige, i. Allg. nicht-lineare Funktion von  $y$  ist. Dabei handelt es sich um eine autonome Differentialgleichung 1. Ordnung. Z.B. ist die logistische Wachstumsgleichung  $y' = ry(1 - y/K)$  eine solche autonome Gleichung mit  $f(y) = ry(1 - y/K)$ . Vielfach sind Aussagen über die Funktion  $y(t)$  möglich, ohne die explizite Lösung der Gleichung zu kennen. Aussagen über den Verlauf von Lösungsfunktionen, über mögliche Gleichgewichtslagen und deren Stabilität zählen zur qualitativen Theorie von Differentialgleichungen. Typische Fragen der qualitativen Theorie sind:

### 1. Welche Gleichgewichtspunkte besitzt die Differentialgleichung $y' = f(y)$ ?

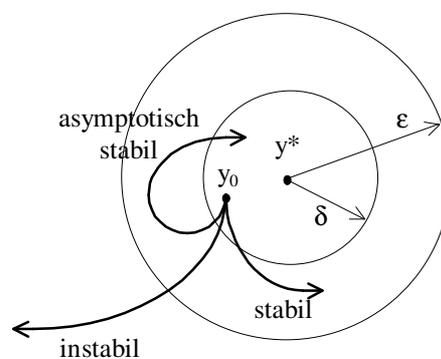
Dabei heißt  $y^*$  **Gleichgewichtspunkt** (stationärer Zustand) der Differentialgleichung  $y' = f(y)$ , falls  $f(y^*) = 0$ . Mit jedem Gleichgewichtspunkt ist automatisch die konstante Lösung (stationäre Lösung)  $y(t) = y^*$  verbunden.

Beispiel: Wir wählen die logistische Gleichung  $y' = f(y) = ry(1 - y/K)$  mit  $r > 0$ ,  $K > 0$  ( $r$  Wachstumsrate,  $K$  Sättigungskonstante). Wegen

$$f(y) = ry(1 - y/K) = 0 \Rightarrow y_1^* = 0, y_2^* = K$$

gibt es zwei Gleichgewichtslagen, nämlich die Populationsgrößen 0 und  $K$ .

### 2. Wie verhalten sich die Lösungen der Differentialgleichung in der Nähe eines Gleichgewichtspunktes?



Ein Gleichgewichtspunkt  $y^*$  kann stabil, asymptotisch stabil oder instabil sein. Man nennt  $y^*$  **stabil**, wenn jede Lösung  $y(t)$ , die nahe genug bei  $y^*$  beginnt, eine beliebig vorgegebene

Umgebung von  $y^*$  nicht verlässt. Gilt darüber hinaus  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y^*$  für jede solche Lösung  $y(t)$ , so heißt  $y^*$  **asymptotisch stabil**. Andernfalls ist der Gleichgewichtspunkt  $y^*$  **instabil**.

Es gilt: Ein Gleichgewichtspunkt  $y^*$  von  $y' = f(y)$  ist asymptotisch stabil, falls  $f'(y^*) < 0$ , und instabil, falls  $f'(y^*) > 0$  gilt.

Beispiel: Für das logistische Wachstum ist

$$y' = f(y) = ry(1 - y/K) \Rightarrow f'(y) = r - (2r/K)y.$$

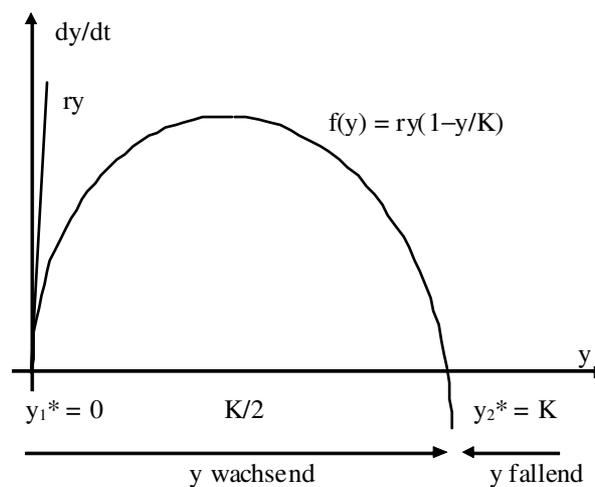
Im Gleichgewicht  $y_1^* = 0$  gilt  $f'(0) = r > 0$ , so dass  $y_1^*$  instabil ist. Für  $y_2^* = K$  ergibt sich dagegen  $f'(y_2^*) = -r < 0$ , also ist  $y_2^*$  asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt. Die Sättigungskonstante (Umweltkapazität)  $K$  entspricht daher jener Populationsgröße, welche im logistischen Wachstumsmodell auf Dauer aufrecht erhalten werden kann.

### 3. Wie sieht das globale Lösungsverhalten bzw. das Langzeitverhalten der Lösungen der Differentialgleichung aus?

Das Verhalten der Lösungen von  $y' = f(y)$  ist aus der Funktion  $f(y)$  ersichtlich und kann in der  $(y, y')$ -Ebene (**Phasenebene**) graphisch dargestellt werden. Da  $f(y)$  die Änderungsrate (z.B. die Wachstumsgeschwindigkeit) von  $y(t)$  beschreibt, gilt offensichtlich

$$f(y) \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \Rightarrow y \text{ ist } \begin{cases} \text{wachsend} \\ \text{stationär} \\ \text{fallend} \end{cases} .$$

Beispiel: Das Verhalten der logistischen Wachstumskurve kann aus nachstehender Abbildung abgelesen werden. Es zeigt sich, dass die Populationsgröße  $y(t)$  für  $y < K$  wachsend und für  $y > K$  fallend ist, so dass die Stelle  $y^* = K$  nicht nur lokal stabil, sondern sogar eine global stabile Gleichgewichtslage darstellt.



## 5. Simulation von Differentialgleichungen

Eine weitere Möglichkeit, einen Einblick in das Verhalten der Lösungen von Differentialgleichungen zu gewinnen, für die eine exakte Lösung nicht mehr möglich ist, besteht in der Durchführung von Computersimulationen. Dabei kann eine Näherungslösung einer vorgegebenen Differentialgleichung zu einem festgelegten Startwert letztlich als Tabelle oder als Kurve berechnet und veranschaulicht werden.

Betrachtet man eine Differentialgleichung zusammen mit einer Anfangsbedingung, so liegt ein so genanntes **Anfangswertproblem** der Form

$$(*) \quad \frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad \text{mit} \quad y(t_0) = y_0$$

vor, wobei die Lösung  $y = y(t)$  in einem vorgegebenen Integrationsintervall  $[a, b]$  mit  $a = t_0$  gesucht ist. Im Folgenden werden drei einfache numerische Verfahren zur Lösung dieses Problems angegeben. Gleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen können stets auf Systeme erster Ordnung zurückgeführt und analog behandelt werden.

Zur numerischen Simulation des Anfangswertproblems (\*) wählen wir zunächst eine Intervallteilung

$$a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = b$$

von  $[a, b]$  in  $n$  Teilintervalle mit den Gitterpunkten  $t_i = t_0 + i h$  (für  $i = 0, \dots, n$ ) und der Schrittweite  $h = (b-a)/n$ . Aus (\*) folgt durch Integration nach  $t$  in den Grenzen  $t_0$  und  $t_0 + h$

$$y(t_0 + h) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+h} f(t, y(t)) dt$$

bzw.

$$(**) \quad y(t_0 + h) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+h} f(t, y(t)) dt.$$

Diese Gleichung bildet den Ausgangspunkt für die nachstehenden Lösungsverfahren. Ersetzt man nämlich das Integral in (\*\*) durch eine Näherungsformel, so erhält man zunächst einen Näherungswert  $y_1$  für  $y(t_1)$ . Sodann löst man dieselbe Differentialgleichung zur Anfangsbedingung  $y(t_1) = y_1$  und erhält eine Näherung  $y_2$  usw., bis sich letztlich  $y_n$  als Näherung für  $y(t_n)$  ergibt. Das numerische Verfahren liefert somit die Näherungswerte  $y_i$  für die unbekanntenen Funktionswerte  $y(t_i)$ , d.h., wir erhalten die Lösung in Form einer Wertetabelle mit den Wertepaaren  $(t_i, y_i)$  für alle  $i$ .

### 1. Das Euler'sche Polygonzugverfahren

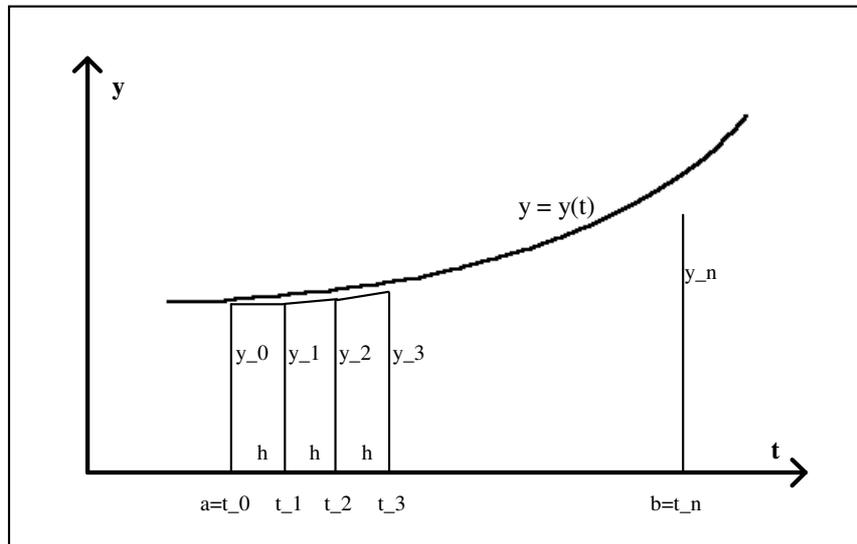
Im einfachsten Fall berechnet man das Integral in (\*\*) nach der Rechteckformel

$$\int_{t_0}^{t_0+h} f(t, y(t)) dt = hf(t_0, y_0)$$

und erhält die Näherung  $y_1 = y_0 + h f(t_0, y_0)$  bzw. allgemein

$$(E) \quad y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \quad \text{für} \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Dieses Verfahren kann auch auf einfache Weise geometrisch interpretiert werden. Der Übergang von  $t_i$  zu  $t_{i+1}$  entspricht für jedes  $i$  dem Fortschreiten entlang der Tangente an die Lösungskurve der Differentialgleichung im Punkt  $(t_i, y_i)$  bis zum Punkt  $(t_{i+1}, y_{i+1})$ , wodurch insgesamt ein Streckenzug (Polygonzug) entsteht.



Eulersches Polygonzugverfahren

## 2. Verbessertes Euler'sches Polygonzugverfahren

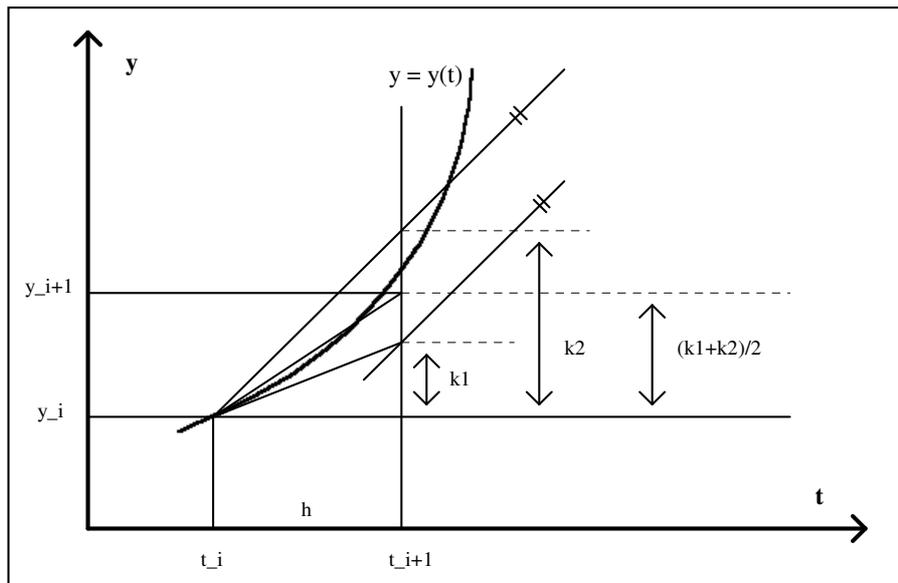
Verwendet man zur Integration in (\*\*) die Sehnentrapezformel, so erhält man im  $i$ -ten Schritt die Gleichung

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_i+h} f(t, y(t)) dt = y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})],$$

in welcher der Näherungswert  $y_{i+1}$  für  $y(t_{i+1})$  implizit vorkommt. Ersetzen wir den unbekannt Wert  $y_{i+1}$  auf der rechten Seite der Gleichung durch die Näherung  $y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i)$  gemäß (E), so folgt

$$(VE) \quad y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} k_1 = hf(t_i, y_i) \\ k_2 = hf(t_i + h, y_i + k_1) \end{cases}.$$

Im Gegensatz zum einfachen Euler'schen Verfahren werden in (VE) die Änderungsraten  $k_1$  zu Beginn jedes Simulationsschrittes und eine mittels Euler-Verfahren näherungsweise bestimmte Änderungsrate  $k_2$  am Ende des Simulationsintervalls gemittelt (siehe Abbildung).



Verbessertes Eulersches Polygonzugverfahren

### 3. Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

Eine weitere Verbesserung gegenüber (VE) basiert auf der Anwendung der Kepler'schen Fassregel auf das in (\*\*\*) auftretende Integral und führt auf das Lösungsverfahren

$$(RK) \quad y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} k_1 = hf(t_i, y_i) \\ k_2 = hf(t_i + h/2, y_i + k_1/2) \\ k_3 = hf(t_i + h/2, y_i + k_2/2) \\ k_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3) \end{cases}$$

Der in (RK) angegebene Algorithmus repräsentiert ein so genanntes Verfahren 4. Ordnung, d.h., eine Halbierung der Schrittweite h hat eine Verringerung des Verfahrensfehlers auf etwa 1/16 zur Folge. Dieser erhöhten Genauigkeit steht jedoch ein größerer Rechenaufwand gegenüber, da für jeden Einzelschritt vier Funktionsauswertungen von f erforderlich sind.

In jedem Fall kann die Simulation des Anfangswertproblems (\*) bzw. eines mehrdimensionalen Analogons nach dem folgenden Schema ablaufen:

Anfangszeitpunkt a, Endzeitpunkt b und Schrittweite h für die Simulation festlegen
Anfangswerte für alle Zustandsgrößen des Systems vorgeben
t := a
Solange t < b
Zwischengrößen für das Intervall (t, t+h) und damit neue Zustandsgrößen zum Zeitpunkt t+h nach einem der Verfahren (1), (2) oder (3) ermitteln
t := t + h

## 6. Beispiele aus der mathematischen Ökologie

Ökologische Problemstellungen sind immer wieder aktuell. Man denke z.B. an Fragen des Bevölkerungswachstums, der Ausbeutung von Fischbeständen in den Weltmeeren oder des Klimawandels, die seit vielen Jahren regelmäßig wiederkehrend die Berichterstattung in den Medien bestimmen. Weitere Aufgabenstellungen der mathematischen Ökologie stellen die Beschreibung der Wechselwirkungen zwischen ein oder mehreren Populationen und ihrer Umwelt in einem Ökosystem dar, Fragen der wirtschaftlichen Nutzung eines Waldbestandes, Probleme der Ausbreitung von Schadstoffen in Gewässern und in der Luft, und viele andere mehr.

### 1. Exponentielles Wachstum in der Ökologie

Einer der grundlegendsten Wachstumsprozesse ist das exponentielle Wachstum. Dieses ist dadurch gekennzeichnet, dass der Zuwachs einer Größe proportional zum jeweiligen Bestand ist. Klassische Beispiele dafür findet man nicht nur in der Biologie, sondern auch z.B. in der Finanzmathematik (Zinseszinsrechnung) oder in der Physik (radiaktiver Zerfall).

Die Größe einer Population in Abhängigkeit von der Zeit  $t \geq 0$  ist eine Funktion, die an und für sich nur ganzzahlige Werte annehmen kann. Um die Methoden der Analysis anwenden zu können, approximieren wir jedoch die Populationsgröße durch eine stetige, ja differenzierbare Funktion  $x(t)$ . Der Differentialquotient

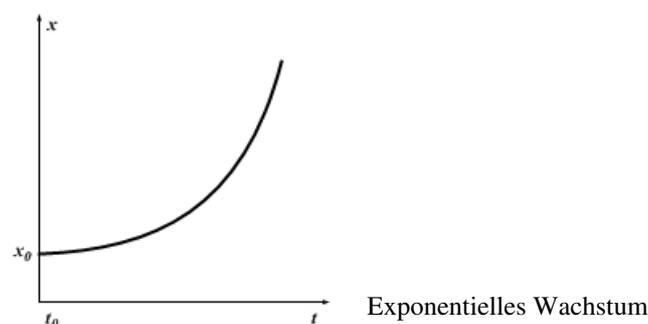
$$x'(t) = \frac{dx}{dt}$$

beschreibt dann die Änderung der Populationsgröße pro Zeiteinheit, also die Wachstumsgeschwindigkeit.

Im einfachsten Fall des exponentiellen Wachstums ist die Wachstumsgeschwindigkeit  $x'(t)$  proportional zum Bestand, also

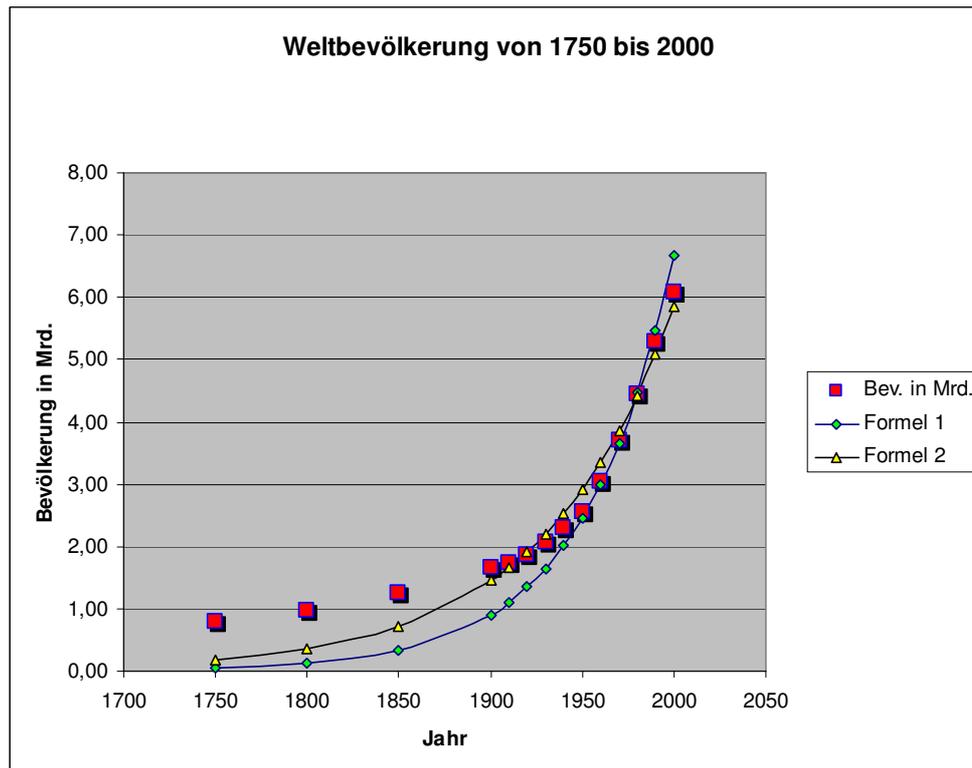
$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = rx$$

mit der Wachstumsrate  $r$ . Gleichung (1) besitzt die bekannte Lösung  $x(t) = x_0 e^{rt}$  zur Anfangsbedingung  $x(0) = x_0$  bzw. etwas allgemeiner  $x(t) = x_0 e^{r(t-t_0)}$  zur Anfangsbedingung  $x(t_0) = x_0$  (siehe Abbildung für  $r > 0$ ).



Tatsächlich können exponentielle Wachstumsvorgänge z.B. bei Bakterien – zumindest durch eine gewisse Zeit hindurch – recht gut beobachtet werden. Das exponentielle Wachstum wurde auch schon vom britischen Nationalökonom Thomas Malthus betrachtet, der in seiner Bevölkerungstheorie aus dem Jahre 1798 vor den Folgen eines exponentiellen Anstiegs der Bevölkerungszahl bei nur linearem Zuwachs der Nahrungsmittelproduktion warnte.

Vergleicht man die Entwicklung der Bevölkerung unserer Erde mit dem Exponentialmodell, so ergibt sich das folgende Bild:



Wachstum der Weltbevölkerung und exponentielles Wachstum

Die Weltbevölkerung ist von unter einer Milliarde um das Jahr 1800 auf 6 Milliarden Einwohner im Jahr 2000 angestiegen. Derzeit (2010) beträgt sie etwas weniger als 7 Milliarden Menschen. Wählt man den Bevölkerungsstand von 1960 mit  $x(1960) = 3$  Milliarden und schätzt die jährliche Zuwachsrate grob mit  $r = 2\%$ , so ergibt sich die Gleichung

$$(2) \quad x(t) = x_0 e^{r(t-t_0)} = 3 \cdot 10^9 e^{0,02(t-1960)} .$$

Die entsprechende Kurve (vgl. Formel 1 in obiger Abb.) zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit den tatsächlichen Bevölkerungsdaten für den Zeitraum 1950 bis 1990. Davor bzw. danach hat jeweils ein langsames Bevölkerungswachstum stattgefunden. Aus Gleichung (2) findet man sofort die Zeit, in der die Weltbevölkerung auf das Doppelte anwächst, gemäß

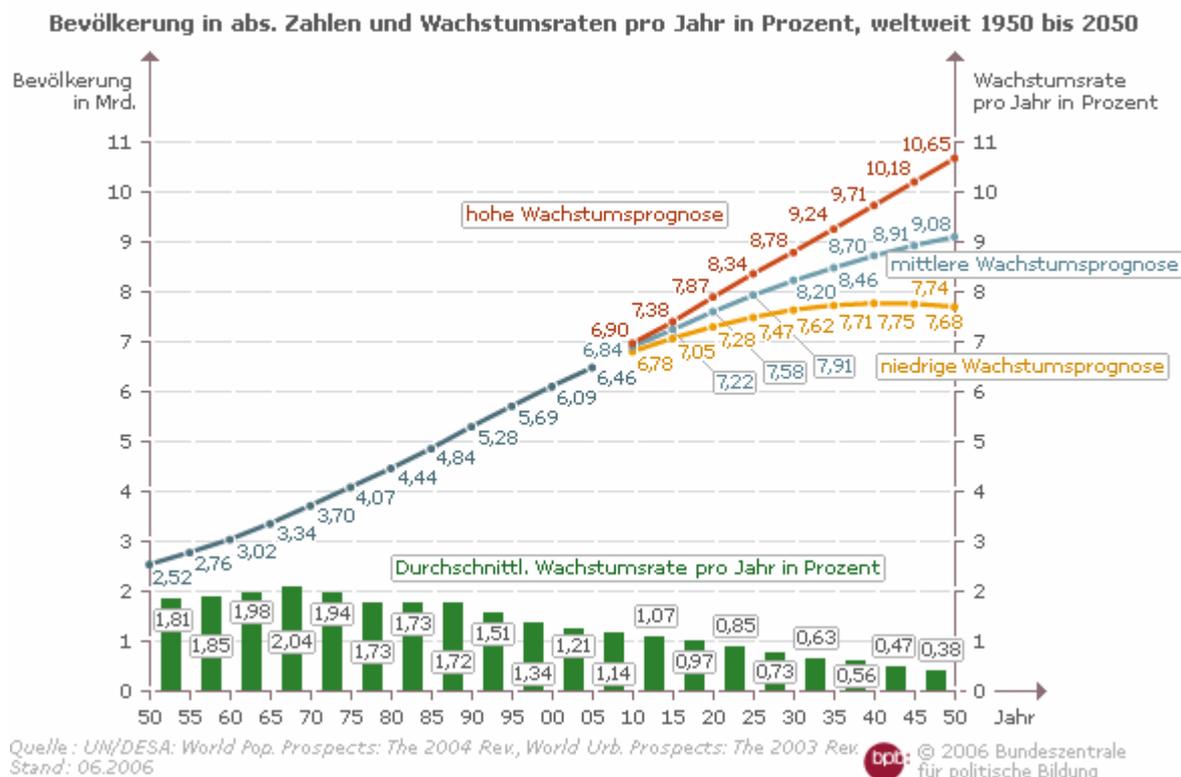
$$(3) \quad x(t + \Delta t) = 2x(t) \Rightarrow \Delta t = \frac{\ln 2}{r} = 34,7 \text{ Jahre} ,$$

also eine Verdoppelung alle 35 Jahre.

Eine andere Approximation für das Wachstum der Weltbevölkerung erhält man durch Regression mittels der Methode der kleinsten Quadrate. Dabei ergeben sich für die Parameter in der Lösung von Gleichung (2) die Werte  $x(1960) = 3,35 \cdot 10^9$  und  $r = 1,4\%$ . Diese Kurve ist zum Vergleich als Formel 2 ebenfalls in Abb. 2 eingezeichnet.

Die voraussichtliche Entwicklung des Bevölkerungswachstums bis zum Jahr 2050 ist für drei verschiedene Prognosevarianten in der nächsten Abbildung dargestellt. Ergänzend seien auch die eindrucksvollen Studien über die „Grenzen des Wachstums“ von Dennis Meadows et al. erwähnt, die ursprünglich im Auftrag des Club of Rome erstellt wurden und die Zukunft der Weltbevölkerung und der Weltwirtschaft bis zum Jahr 2100 zum Inhalt haben.

## ■ Bevölkerungswachstum



Wachstumsprognose der Weltbevölkerung bis 2050, <http://www.bpb.de/wissen>

## 2. Das Logistische Wachstum

In der Realität sind dem exponentiellen Wachstum natürlich Grenzen gesetzt, und zwar durch Beschränkung des Wachstums in Folge der interspezifischen Konkurrenz um vorhandene Nahrung, begrenzten Lebensraum oder andere natürliche Ressourcen. Diese werden in einfacher Form beim logistischen Wachstum berücksichtigt, das auf Pierre Verhulst 1837 und Raymond Pearl 1930 (nach dem auch der so genannte Pearl-Index als Maßzahl für die Zuverlässigkeit von Methoden der Empfängnisverhütung benannt ist) zurückgeht.

Schreiben wir wieder  $x(t)$  für die Populationsgröße zur Zeit  $t$  und nehmen diesmal an, dass die Wachstumsrate  $r$  in (1) nicht konstant ist, sondern linear von  $x$  abhängt (also  $r(x) = r_1 + r_2x$ ), so erhalten wir die logistische Differentialgleichung

$$(4) \quad \frac{dx}{dt} = r_1 x + r_2 x^2 = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

mit den neuen Parametern  $r$ ,  $K > 0$ . Dabei wird  $r$  als (anfängliche) Wachstumsrate und  $K$  als Umweltkapazität bezeichnet.

Die Gleichung (4) liefert die explizite Lösung

$$(5) \quad x(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K}{x_0} - 1\right)e^{-rt}}$$

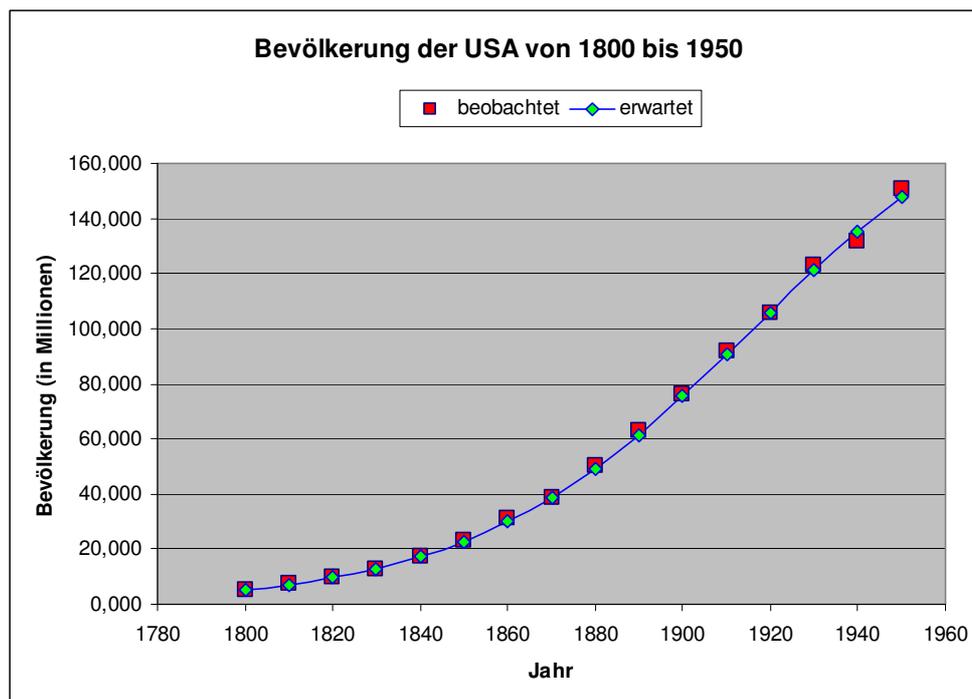
zur Anfangsbedingung  $x(0) = x_0$ .

Das Lösungsverhalten der logistischen Differentialgleichung kann aber auch sehr einfach aus qualitativen Überlegungen abgeleitet werden, wie wir bereits oben an Hand der Phasenebene gesehen haben. Neben den bereits diskutierten Gleichgewichtslagen für  $x = 0$  und  $x = K$  befindet sich an der Stelle  $x = K/2$  ein Wendepunkt von  $x(t)$ , denn Differenzieren und Nullsetzen von (4) liefert

$$(6) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = r \left(1 - 2\frac{x}{K}\right) \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow x = \frac{K}{2}.$$

Man beachte, dass alle diese Aussagen ohne explizite Kenntnis der Lösung (5) der Differentialgleichung möglich sind.

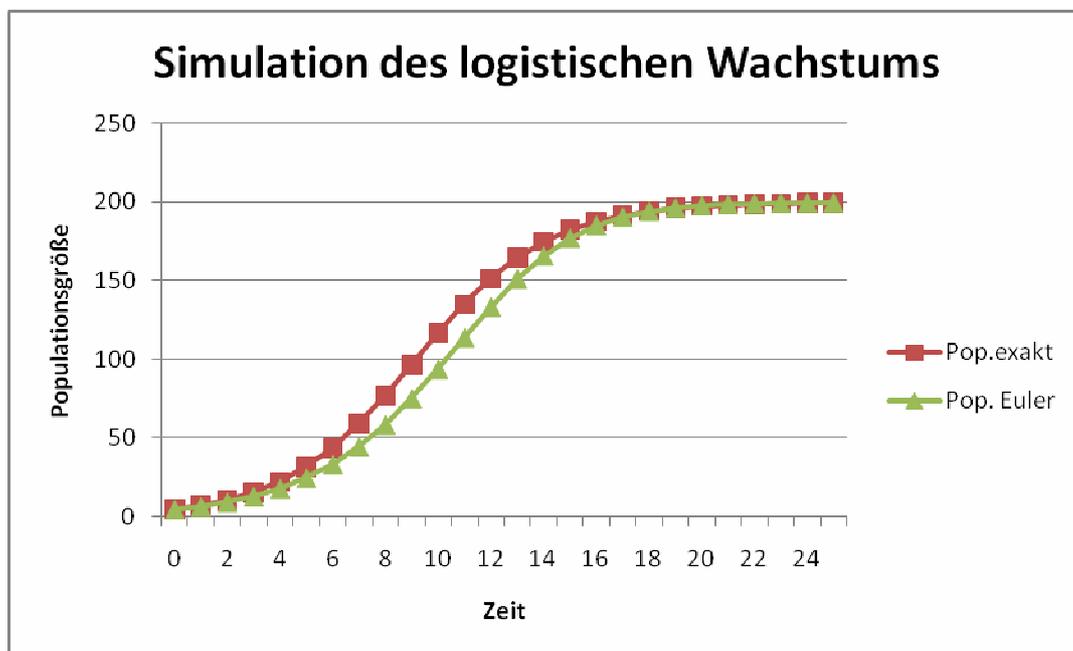
Als Musterbeispiel für die Gültigkeit des logistischen Gesetzes betrachten wir das von Pearl und Reed aufgestellte Modell für das Bevölkerungswachstum der Vereinigten Staaten während der Jahre 1800 bis 1950. Aus den Ergebnissen von drei Volkszählungen bestimmten die Autoren die Werte der Parameter  $r$ ,  $K$  und  $x_0$  und damit die logistische Wachstumsgleichung. Der Vergleich in untenstehender Abbildung zeigt eine beinahe perfekte Übereinstimmung zwischen den erhaltenen Werten und den tatsächlich beobachteten Bevölkerungszahlen.



Logistisches Modell für die Bevölkerung der USA von 1800 bis 1950

Weitere Beispiele für die Anwendung des logistischen Wachstums außerhalb der Demographie und Ökologie findet man z.B. in der Epidemiologie bei der Ausbreitung von Infektionskrankheiten, in der Medizin beim Wachstum eines Tumors, in der Wirtschaft bei der Entwicklung des Marktanteils für technologische Innovationen, usw.

Die praktische Durchführung einer Computersimulation kann in der Schule z.B. mit Hilfe einer Tabellenkalkulation erfolgen. Dabei sind lediglich die Spalten für die  $t$ - und  $x$ -Werte gemäß obiger Rekursion zu erzeugen und als Graphik darzustellen. Die folgende Abbildung zeigt das Wachstum einer Bakterienpopulation mit den Parametern  $r = 0,4$  und  $K = 200$ . Die Koordinaten der Stützpunkte werden in einer Tabelle berechnet, einmal nach der exakten Lösung gemäß (5) und ein anderes Mal z.B. nach dem Euler-Verfahren. Erstellt man die Tabellen dynamisch in Abhängigkeit von den Parametern  $r$  und  $K$ , so kann durch Änderung der Parameterwerte der Einfluss auf die Lösungskurven direkt beobachtet werden. Ferner kann eine Computersimulation natürlich auch in jeder höheren Programmiersprache oder Skriptsprache ausprogrammiert werden und als Graphik am lokalen Rechner oder bei Websimulation in einem Browserfenster ausgegeben werden.



### 3. Interaktion von Populationen: Räuber-Beute-Modell von Rosenzweig und MacArthur

Im nächsten Abschnitt kommen wir nun zu Modellen für zwei Populationen, die einander gegenseitig beeinflussen, und dadurch ein vielfältiges und interessantes Verhalten zeigen können. Dabei sind im Prinzip drei verschiedene Formen der Wechselwirkung möglich, nämlich Kooperation, Konkurrenz oder ein Räuber-Beute-Verhalten. Kooperation, d.h. positive Interaktionen zwischen den Populationen, führt i. Allg. zur Koexistenz, das Wachstum wird nur durch die Konkurrenz innerhalb einer Population (wie beim logistischen Wachstum) beschränkt. Im Konkurrenzfall oder bei Räuber-Beute-Systemen hingegen wirkt zumindest eine der beiden Populationen negativ auf die jeweils andere Population, so dass es zum Aussterben einer Population kommen kann, während die andere überlebt. Von besonderem Interesse ist die Frage, ob bzw. unter welchen Umständen bzw. in welcher Form eine Koexistenz der beiden Populationen möglich ist.

Stehen zwei Populationen in einem Räuber-Beute-Verhältnis zueinander, so kann deren Entwicklung im einfachsten Fall durch das klassische Lotka-Volterra'sche Räuber-Beute-Modell

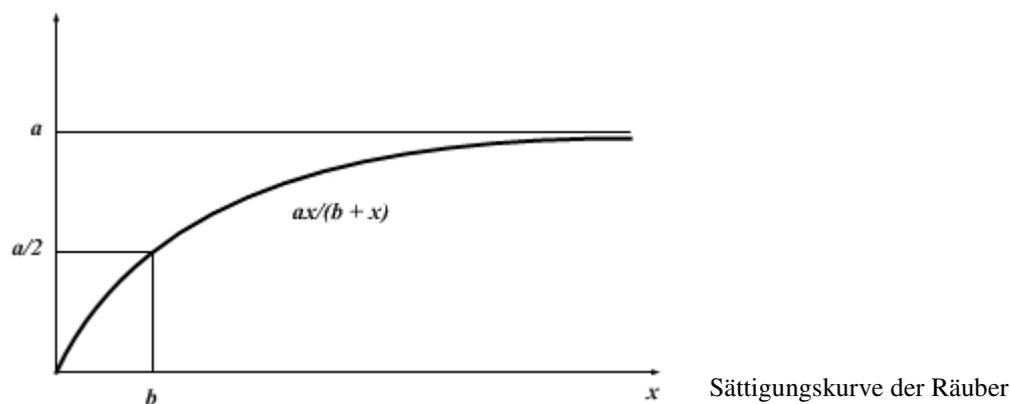
$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} &= y(-c + dx) \end{aligned}$$

für die Beutepopulation  $x(t)$ , Räuberpopulation  $y(t)$  mit den Modellparametern  $a, b, c, d > 0$  beschrieben werden. Das System besitzt, wie man zeigen kann, einen inneren Gleichgewichtspunkt, und die Lösungskurven in der  $(x,y)$ -Ebene bilden geschlossene Kurven um diesen Punkt, welche beliebig oft durchlaufen werden. Daraus ergeben sich die für Räuber-Beute-Systeme charakteristischen Schwingungen der Beute- bzw. Räuberpopulation in Abhängigkeit von der Zeit.

Ein weiteres Räuber-Beute-Modell, das gegenüber dem Lotka-Volterra-System ein realistischeres und zugleich mathematisch reichhaltigeres Lösungsverhalten besitzt, ist das Modell von Rosenzweig und MacArthur

$$(8) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{ax}{b+x}y \\ \frac{dy}{dt} &= -sy + e\frac{axy}{b+x} \end{aligned}$$

mit den sechs Parametern  $a, b, e, r, s, K > 0$ . In diesem Modellansatz ist sowohl eine innerspezifische Konkurrenz für die Beutepopulation  $x(t)$  sowie ein Sättigungsverhalten der Räuber  $y(t)$  berücksichtigt. Letzteres kommt im zweiten Term der ersten Gleichung in (8) zum Ausdruck und trägt der Tatsache Rechnung, dass jeder Räuber – selbst bei reichhaltig vorhandener Beute – nur einen gewissen Teil der Beutetiere fressen kann (siehe Abbildung). Der Parameter  $e$  in der zweiten Gleichung von (8) ist ein so genannter Effizienzparameter und beschreibt, wie effektiv die Räuber ihre Beute verwerten können.

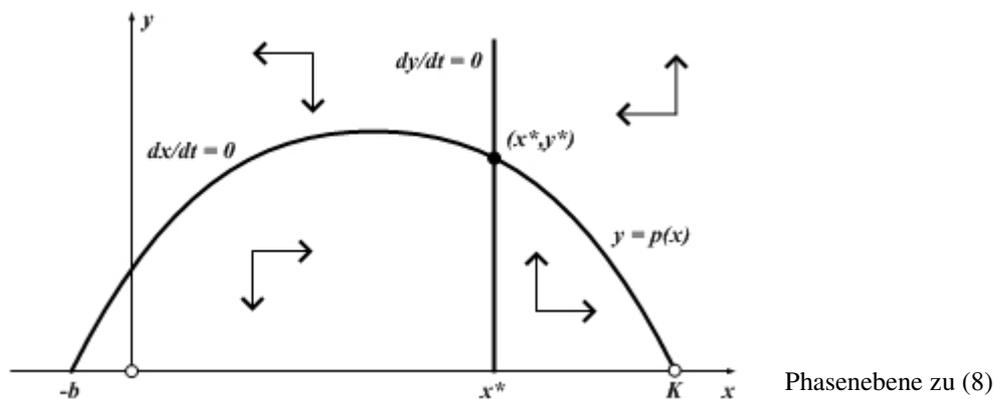


Um die Bedeutung der Parameter leichter zu erkennen, berechnet man die Gleichgewichtslagen des Systems (8) aus der Bedingung  $dx/dt = dy/dt = 0$  und erhält

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} = 0 &\Rightarrow x = 0 \text{ oder} \\
 r\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{ay}{b+x} = 0 &\Leftrightarrow y = p(x) = \frac{r}{a}\left(1 - \frac{x}{K}\right)(b+x), \\
 \frac{dy}{dt} = 0 &\Rightarrow y = 0 \text{ oder} \\
 -s + e\frac{ax}{b+x} = 0 &\Leftrightarrow x^* = \frac{bs}{ae-s}.
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Demnach gibt es im ersten Quadranten die zwei Randgleichgewichtspunkte  $(0, 0)$  und  $(K, 0)$  sowie für bestimmte Parameterkonstellationen noch einen weiteren, inneren Gleichgewichtspunkt  $(x^*, y^*)$  als Schnittpunkt der Geraden  $x = x^*$  mit der Parabel  $y = p(x)$ .

Das Lösungsverhalten des Systems (8) kann sehr anschaulich in der  $(x, y)$ -Phasenebene diskutiert werden. In nachstehender Abbildung sind die so genannten Null-Isoklinen für  $dx/dt = 0$  und  $dy/dt = 0$  in der  $(x, y)$ -Ebene eingezeichnet, also für  $dx/dt = 0$  die  $y$ -Achse  $x = 0$  sowie die Parabel  $y = p(x)$ , und für  $dy/dt = 0$  die  $x$ -Achse  $y = 0$  sowie die senkrechte Gerade  $x = x^*$ . Die Schnittpunkte entsprechender Isoklinen stellen offensichtlich die Gleichgewichtslagen dar. Ferner wird der erste Quadrant der  $(x, y)$ -Ebene durch diese Kurven in vier Bereiche unterteilt, die jeweils durch eine bestimmte Vorzeichenkombination von  $dx/dt$  und  $dy/dt$  und damit ein bestimmtes Monotonieverhalten der Lösungen  $x(t)$  und  $y(t)$  charakterisiert sind.



Eine Computersimulation zeigt, dass in Abhängigkeit vom Effizienzparameter  $e$  folgende drei Fälle möglich sind:

- Für kleine Werte von  $e$ , d.h., falls die Räuber die Beute nicht ausreichend effizient nutzen können, stirbt die Räuberpopulation aus.
- Für mittlere Werte von  $e$  ist – ähnlich wie im Lotka-Volterra-Modell – eine Koexistenz beider Populationen möglich, allerdings konvergieren die Lösungen hier gegen den inneren Gleichgewichtspunkt  $(x^*, y^*)$ .
- Auch für große Werte des Effizienzparameters  $e$  werden Räuber und Beute koexistieren. Allerdings wird der Gleichgewichtspunkt  $(x^*, y^*)$  instabil und dafür tritt ein stabiler Grenzzyklus auf, in den die Phasenkurven von innen wie von außen hinein konvergieren.

## 7. Beispiele aus der Wirtschaftsmathematik

### 1. Angebot und Nachfrage in einem Elementarmarkt

Wir betrachten einen Elementarmarkt für ein bestimmtes Gut und nehmen an, dass das Angebot  $A(t)$  und die Nachfrage  $N(t)$  nach diesem Gut ausschließlich durch dessen Marktpreis  $p(t)$  bestimmt werden. Dieser möge - als Funktion der Zeit - im Fall eines Gleichgewichts zwischen Angebot und Nachfrage unverändert bleiben, andernfalls ändere er sich proportional zum jeweiligen (positiven oder negativen) Nachfrageüberschuss, d.h.

$$p'(t) = \gamma(N(t) - A(t)) \quad \text{mit } \gamma > 0.$$

Man bestimme den Marktpreis  $p(t)$  und untersuche sein Verhalten für den Fall, dass Angebot und Nachfrage durch die Funktionen  $A(t) = 0,4 + 0,8p(t)$  bzw.  $N(t) = 1,6 - 0,3p(t) - 0,1p(t)^2$  gegeben sind.

Die angegebene Differentialgleichung ist die spezielle Form eines Ansatzes von Walras. Nach diesem zeigt der Marktpreis stets die Tendenz, bei positivem Nachfrageüberschuß anzusteigen und bei negativem Nachfrageüberschuß abzufallen. Setzt man nun die Funktionsterme von  $A(t)$  und  $N(t)$  in die Modellgleichung ein, so erhält man  $p'(t) = \gamma(1,2 - 1,1p(t) - 0,1p(t)^2)$ . Das ist eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung, welche wir nach dem verbesserten Eulerschen Polygonzugverfahren gemäß

$$p_{i+1} = p_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} k_1 = h\gamma(1,2 - 1,1p_i - 0,1p_i^2) \\ k_2 = h\gamma(1,2 - 1,1(p_i + k_1) - 0,1(p_i + k_1)^2) \end{cases}$$

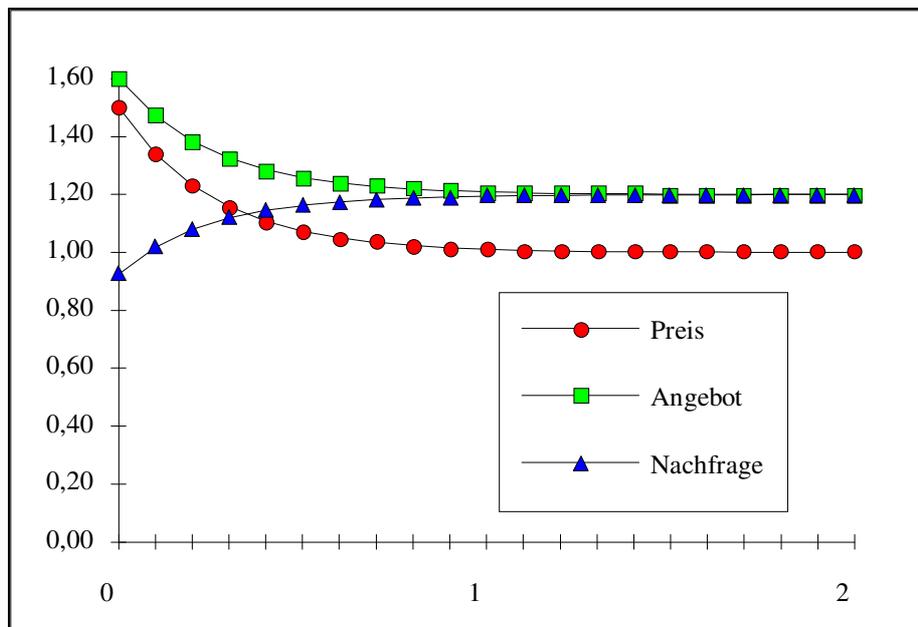
und  $t_{i+1} = t_i + h$  für  $i = 0, 1, 2, \dots$  lösen.

Dazu legen wir eine Tabelle an mit Spalten für die Zeit  $t$ , den Preis  $p$ , Angebot  $A$  und Nachfrage  $N$ , sowie für die beiden Hilfsgrößen  $k_1$  und  $k_2$  für das gewählte Näherungsverfahren. Ein Simulationslauf mit den Parametern  $p_0 = 1,5$ ,  $\gamma = 3$  und der Schrittweite  $h = 0,1$  führt zu folgendem Ergebnis:

Zeit	Preis	Angebot	Nachfrage	Hilfsgrößen	
t	p(t)	A(t)	N(t)	k1	k2
0	1,50	1,60	0,93	-0,2025	-0,1187
0,1	1,34	1,47	1,02	-0,1358	-0,0806
0,2	1,23	1,38	1,08	-0,0918	-0,0550
0,3	1,16	1,33	1,12	-0,0623	-0,0375
0,4	1,11	1,29	1,14	-0,0424	-0,0257
0,5	1,07	1,26	1,16	-0,0290	-0,0176
0,6	1,05	1,24	1,17	-0,0198	-0,0120
0,7	1,03	1,23	1,18	-0,0136	-0,0082
0,8	1,02	1,22	1,19	-0,0093	-0,0057
0,9	1,02	1,21	1,19	-0,0064	-0,0039
1	1,01	1,21	1,19	-0,0044	-0,0027
1,1	1,01	1,21	1,20	-0,0030	-0,0018
1,2	1,01	1,20	1,20	-0,0021	-0,0013
1,3	1,00	1,20	1,20	-0,0014	-0,0009
1,4	1,00	1,20	1,20	-0,0010	-0,0006

1,5	1,00	1,20	1,20	-0,0007	-0,0004
1,6	1,00	1,20	1,20	-0,0005	-0,0003
1,7	1,00	1,20	1,20	-0,0003	-0,0002
1,8	1,00	1,20	1,20	-0,0002	-0,0001
1,9	1,00	1,20	1,20	-0,0001	-0,0001
2	1,00	1,20	1,20	-0,0001	-0,0001

Wie man sieht, konvergiert der Preis monoton gegen den Gleichgewichtswert  $p^* = 1$  des statischen Modells  $A = N$ , wobei im Gleichgewicht die Menge  $A^* = N^* = 1,2$  umgesetzt wird. Weitere Simulationen mit Startwerten für  $p_0$  im Intervall  $0,5 \leq p_0 \leq 2$  zeigen: Im Fall  $p_0 < p^*$  kommt es, hervorgerufen durch einen Überschuss der Nachfrage über das Angebot, zu einem Preisanstieg, der wiederum zu einer Verringerung dieses Nachfrageüberschusses führt. Für  $p_0 > p^*$  hingegen fällt der Preis  $p(t)$  gegen  $p^*$ , während Angebot und Nachfrage einander annähern. Die Geschwindigkeit dieses Prozesses ist durch den Parameter  $\gamma$  bestimmt.



Zeitliche Entwicklung des Marktpreises zwischen Angebot und Nachfrage

## 2. Produktlebenszyklus in der Betriebswirtschaft

Wir betrachten die Verbreitung eines bestimmten Produkts von der Neueinführung bis zur Sättigung des Marktes. Die Verbreitung des Produkts werde an der Gesamtzahl der abgesetzten Einheiten  $N(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  gemessen. Die Maximalzahl der absetzbaren Einheiten werde durch die Marktkapazität  $K$  begrenzt. Für  $N(t)$  gelte

$$(1) \quad N'(t) = r \frac{N(t)}{K} (K - N(t)) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right),$$

d.h., die Verbreitung steigt proportional zum Marktsättigungsgrad  $N/K$  und zum Käuferpotential  $K - N$ .

(a) Hat das Produkt eine beschränkte Lebensdauer, so setzt sich dessen Absatz  $A$  aus Neuanschaffungen und Ersatzinvestitionen zusammen. Wir wollen annehmen, es gelte

$$(2) \quad A(t) = N'(t) + \frac{N(t)}{l},$$

wobei  $l$  die Produktlebensdauer bezeichnet. Man untersuche die zeitliche Entwicklung des durch (1) und (2) beschriebenen Systems.

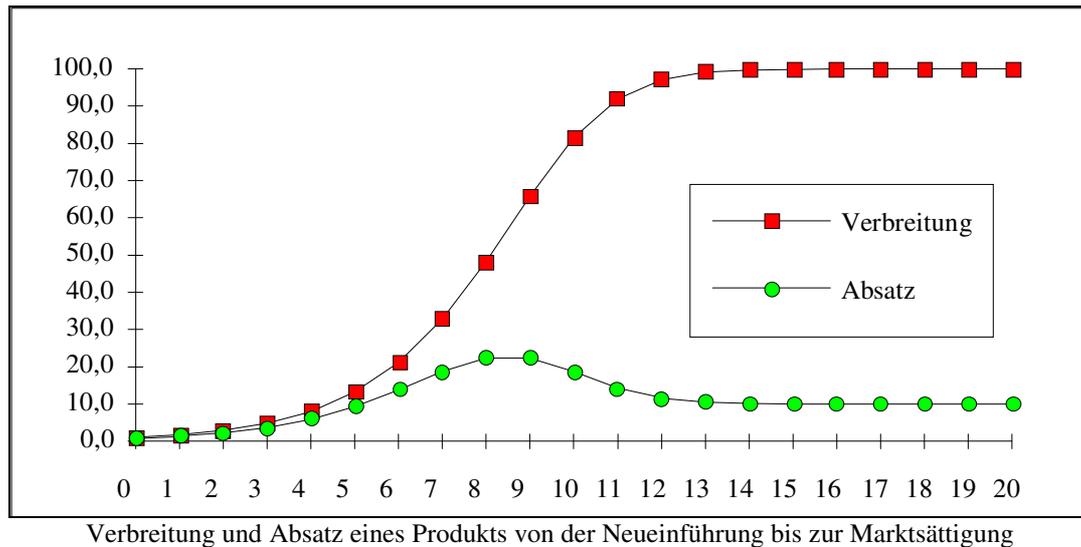
(b) Um die Preisgestaltung bei der Einführung des Produkts mit zu berücksichtigen, werde die Marktkapazität  $K$  als Funktion des Preises  $p$  gemäß

$$(3) \quad K(p) = K_{\max} \left(1 - \frac{p}{p_{\max}}\right)$$

angenommen. Man untersuche anhand des Modells (1) - (3) die Frage, welche Strategie zur Preisgestaltung bei der Einführung des Produkts gewählt werden sollte, um in einem vorgegebenen Zeitraum einen möglichst hohen Gesamtumsatz zu erzielen.

Mit zunehmender Verbreitung des betrachteten Produkts steigt zwar dessen Bekanntheitsgrad, zugleich scheiden aber immer mehr Besitzer des Produkts als potentielle Käufer aus. Dieses Verhalten, welches durch die Modellgleichung (1) ausgedrückt wird, führt nach einem annähernd exponentiellen Anstieg in der Wachstumsphase zu einer Verflachung der Verbreitungskurve und sinkenden Absätzen in der Sättigungsphase. Der Absatz (2) in (b) pendelt sich nach Erreichen der Marktsättigung auf dem Niveau der Ersatzinvestitionen ein. Nachstehend ist ein typischer Simulationslauf mit den Parametern  $N_0 = 1$ ,  $K = 100$ ,  $r = 0,7$ ,  $l = 10$  und der Schrittweite  $h = 1$  für das Zeitintervall  $1 \leq t \leq 20$  dargestellt.

Zeit $t$	Verbreit. $N$	Neukauf $N'$	Ersatz $N/l$	Absatz $A$
0	1,0	0,7	0,1	0,8
1	1,7	1,2	0,2	1,3
2	2,9	1,9	0,3	2,2
3	4,8	3,2	0,5	3,7
4	8,0	5,2	0,8	6,0
5	13,2	8,0	1,3	9,3
6	21,2	11,7	2,1	13,8
7	32,8	15,4	3,3	18,7
8	48,3	17,5	4,8	22,3
9	65,7	15,8	6,6	22,3
10	81,5	10,6	8,2	18,7
11	92,1	5,1	9,2	14,3
12	97,2	1,9	9,7	11,6
13	99,1	0,6	9,9	10,5
14	99,7	0,2	10,0	10,2
15	99,9	0,1	10,0	10,1
16	100,0	0,0	10,0	10,0
17	100,0	0,0	10,0	10,0
18	100,0	0,0	10,0	10,0
19	100,0	0,0	10,0	10,0
20	100,0	0,0	10,0	10,0



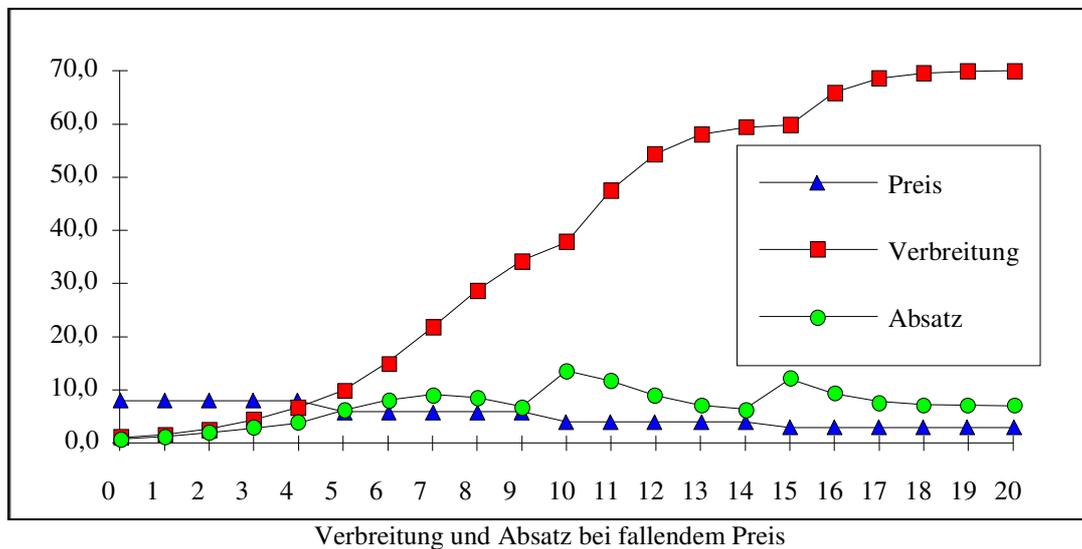
In (b) wird der Preis des Produkts als exogene Modellgröße eingeführt. Die Gleichung (3) beschreibt die Marktkapazität  $K$  als Funktion in  $p$ , welche von  $K = 0$  für  $p = p_{\max}$  mit fallendem Preis linear bis  $K = K_{\max}$  für  $p = 0$  ansteigt. Der Umsatz, der mit dem Absatz  $A$  zum Preis  $p$  erzielt wird, beträgt  $U = pA$ , und der bis zum Zeitpunkt  $t$  erzielte Gesamtumsatz ist dann durch

$$U_{\text{ges}}(t) = \int_0^t p(\tau)A(\tau)d\tau = \int_0^t U(\tau)d\tau$$

gegeben. Wir wählen wieder die oben angegebenen Modellparameter sowie  $K_{\max} = 100$ ,  $p_{\max} = 10$  und nähern das Integral in  $U_{\text{ges}}$  durch eine geeignete Summe an. Ein Vergleich verschiedener Preisstrategien zeigt, dass es am günstigsten ist, das Produkt zu einem hohen Preis einzuführen und diesen später zu reduzieren, um weitere Käuferschichten anzusprechen.

Zeit $t$	Preis $p$	Kap. $K$	Verbreit. $N$	Neukauf $N'$	Ersatz $N//$	Absatz $A$	Umsatz $U_{\text{ges}}$
0	8,0	20,0	1,0	0,7	0,1	0,8	6,1
1	8,0	20,0	1,7	1,1	0,2	1,2	16,0
2	8,0	20,0	2,7	1,7	0,3	1,9	31,4
3	8,0	20,0	4,4	2,4	0,4	2,8	54,1
4	8,0	20,0	6,8	3,1	0,7	3,8	84,6
5	6,0	40,0	9,9	5,2	1,0	6,2	121,9
6	6,0	40,0	15,1	6,6	1,5	8,1	170,5
7	6,0	40,0	21,7	6,9	2,2	9,1	225,2
8	6,0	40,0	28,7	5,7	2,9	8,6	276,5
9	6,0	40,0	34,4	3,4	3,4	6,8	317,5
10	4,0	60,0	37,8	9,8	3,8	13,6	371,8
11	4,0	60,0	47,5	6,9	4,8	11,7	418,4
12	4,0	60,0	54,5	3,5	5,4	9,0	454,3
13	4,0	60,0	58,0	1,4	5,8	7,2	483,0
14	4,0	60,0	59,3	0,5	5,9	6,4	508,5
15	3,0	70,0	59,8	6,1	6,0	12,1	544,8
16	3,0	70,0	65,9	2,7	6,6	9,3	572,6

17	3,0	70,0	68,6	1,0	6,9	7,8	596,1
18	3,0	70,0	69,6	0,3	7,0	7,3	617,9
19	3,0	70,0	69,9	0,1	7,0	7,1	639,1
20	3,0	70,0	70,0	0,0	7,0	7,0	660,2



### 3. Inflation und Arbeitslosigkeit

Die wechselseitige Abhängigkeit von Inflations- und Arbeitslosenrate in einer Volkswirtschaft möge durch den folgenden Modellansatz beschrieben werden:

$$(1) \quad p(t) = \alpha - \beta u(t) + \gamma q(t)$$

$$(2) \quad q'(t) = \delta (p(t) - q(t))$$

$$(3) \quad u'(t) = -\varepsilon (m - p(t))$$

Dabei bezeichnen  $p(t)$  die Inflationsrate, gemessen z.B. am Index der Verbraucherpreise,  $q(t)$  die vom Arbeitsmarkt erwartete Inflationsrate,  $u(t)$  die Arbeitslosenrate, jeweils zum Zeitpunkt  $t$ , und  $m$  die (nominelle) Geldmengenwachstumsrate. Die Variablen  $p$ ,  $q$  und  $u$  bilden die Bestandsgrößen des Systems,  $m$  wird als exogene Größe von außen (z.B. von der Notenbank) vorgegeben, und  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\varepsilon$  sind Parameter mit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\varepsilon > 0$  und  $\gamma \leq 1$ . Man interpretiere die Modellgleichungen und untersuche das zeitliche Verhalten des Systems für unterschiedliche Werte von  $m$ . Welches Langzeitverhalten kann dabei beobachtet werden?

Phillips und Friedman beschrieben die Lohnrate  $w$ , d.i. die Änderungsrate des gesamtwirtschaftlichen Lohnniveaus einer Volkswirtschaft, in Abhängigkeit von der Arbeitslosenrate  $u$  und der Inflationserwartung  $q$  gemäß

$$w(t) = \alpha - \beta u(t) + \gamma q(t).$$

Die Annahme, dass sich steigende Löhne – bei gleichbleibender Arbeitsproduktivität – direkt in steigenden Preisen niederschlagen, führt somit zu Gleichung (1). Demnach haben geringe Arbeitslosigkeit (und folglich großer Nachfragedruck auf dem Arbeitsmarkt) sowie hohe Inflationserwartungen einen Lohnanstieg und damit eine zunehmende Inflation zur Folge,

während die Preissteigerung bei hoher Arbeitslosigkeit oder geringen Inflationserwartungen gedämpft wird. Gleichung (2) beschreibt die Änderung  $q'$  der Inflationserwartungen der Erwerbstätigen, welche proportional zur Differenz  $p - q$  zwischen beobachteter und erwarteter Inflationsrate angenommen wird. Der Einfluss der Inflation auf die Arbeitslosigkeit ist in Gleichung (3) wiedergegeben, wonach sich die Arbeitslosenrate proportional zur realen Geldmengenwachstumsrate  $m - p$  ändert.

Wir wählen die Parameter  $\alpha = 9$ ,  $\beta = 3$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta = 0,75$ ,  $\varepsilon = 0,5$  sowie  $m = 5\%$  und erhalten damit das System

$$(1) \quad p(t) = 9 - 3u(t) + q(t)$$

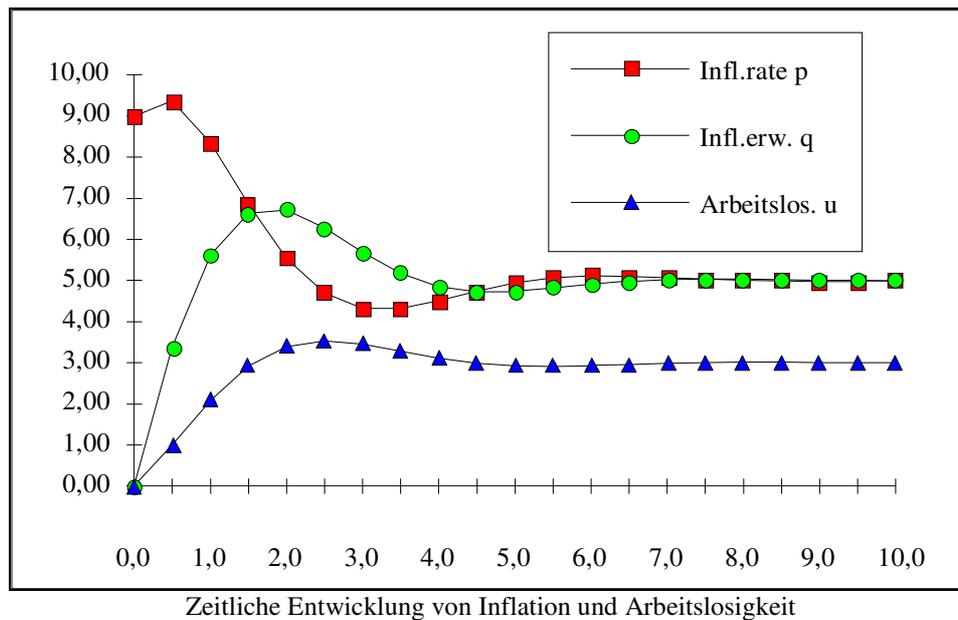
$$(2) \quad q'(t) = 0,75(p(t) - q(t))$$

$$(3) \quad u'(t) = -0,5(m - p(t))$$

welches wir mit Hilfe des Eulerschen Polygonzugverfahrens lösen. Zur Anfangsbedingung  $q(0) = u(0) = 0$ , d.h. keine Inflationserwartungen sowie Vollbeschäftigung zum Zeitpunkt  $t = 0$ , erhält man nachstehend tabellierte Lösung.

Zeit t	Infl.rate p	Infl.erw. q	Arbeitslos. u
0,0	9,00	0,00	0,00
0,5	9,38	3,38	1,00
1,0	8,34	5,63	2,09
1,5	6,86	6,64	2,93
2,0	5,54	6,72	3,39
2,5	4,69	6,28	3,53
3,0	4,33	5,69	3,45
3,5	4,32	5,18	3,28
4,0	4,51	4,86	3,12
4,5	4,75	4,73	2,99
5,0	4,95	4,73	2,93
5,5	5,07	4,81	2,92
6,0	5,11	4,91	2,93
6,5	5,10	4,98	2,96
7,0	5,07	5,03	2,99
7,5	5,03	5,04	3,00
8,0	5,00	5,04	3,01
8,5	4,99	5,03	3,01
9,0	4,98	5,01	3,01
9,5	4,98	5,00	3,01
10,0	4,99	4,99	3,00

Diese Simulation zeigt, dass beide Inflationsraten  $p$  und  $q$  mit gedämpften Schwingungen gegen denselben Grenzwert streben, nämlich gegen die Geldmengenwachstumsrate  $m = 5\%$ . Die Arbeitslosenrate  $u$  strebt ebenfalls einem Grenzwert, der so genannten natürlichen Arbeitslosigkeit  $u^* = 3\%$  zu. Darunter versteht man jene Arbeitslosigkeit, welche selbst dann noch besteht, wenn Angebot und Nachfrage auf dem Arbeitsmarkt übereinstimmen und die Erwartungen von der tatsächlichen Entwicklung nicht abweichen.



Zum Abschluss noch einige Bemerkungen zur Unterrichtspraxis:

- In der Biomathematik und in der Wirtschaftsmathematik, wie ganz allgemein in der angewandten Mathematik, erfüllt die Mathematik eine ganz andere Funktion als im traditionellen Unterricht. Sie fungiert zunächst ganz wesentlich als Darstellungs- und Kommunikationsmittel. Im Vordergrund steht die ökologische oder wirtschaftliche Fragestellung und nicht die Präsentation einer geschlossenen formalen Theorie. Simulationsverfahren sind zudem für den Schüler oft anschaulicher und leichter verständlich als quantitative Lösungsmethoden, andererseits ist dazu ein grundlegendes biologisches bzw. kaufmännisches Verständnis erforderlich. Jedenfalls besteht durch die Behandlung derartiger Modelle und deren Simulation im Unterricht eine Chance, die Attraktivität des Faches Mathematik zu heben und die skeptische Einstellung vieler Schüler gegenüber der Mathematik zu verbessern.
- Die Bedeutung von Simulationsverfahren ist mit zunehmendem Computereinsatz laufend angestiegen. In der Schule kann numerische Simulationen mittels Tabellenkalkulationssystemen, Programmen in einer höheren Programmiersprache oder mit Hilfe von professioneller Simulationssoftware betrieben werden. Dabei ist es jedoch nicht nötig, den Computer in den Mittelpunkt des Unterrichts zu stellen; ihm kommt vielmehr die Rolle eines nützlichen Werkzeugs zu.
- Das Thema Modellbildung und Simulation führt zu zahlreichen Berührungspunkten mit anderen Fächern und eignet sich daher besonders für einen fachübergreifenden, projektorientierten Unterricht. Darüber hinaus bietet sich zur Bewältigung größerer Unterrichtsprojekte Teamarbeit in einzelnen Arbeitsgruppen an. Ein Projekt wird in Teilaufgaben (z.B. Beschaffung und Erfassung aktueller Daten, Implementation eines Simulationsverfahrens, Erstellen einer Prozedur zur graphischen Ausgabe von Simulationsergebnissen, usw.) untergliedert, welche in den Arbeitsgruppen gelöst und anschließend zu einem Ganzen zusammengesetzt werden können.