



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

Vienna University of Technology



# MATHEMATIK IN DEN WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN

Alexia Fürnkranz-Prskawetz

[afp@econ.tuwien.ac.at](mailto:afp@econ.tuwien.ac.at)

ÖAW Informationsmaterial für Lehrer:

<http://www.oeaw.ac.at/deutsch/aktuell/science-education.html>

Frauen in der Technik:

<http://www.fitwien.at/>

## → Grundbegriffe

### Mikroökonomie

→ Angebot und Nachfrage

→ Nutzenmaximierung

→ Profitmaximierung

### Makroökonomie

→ Wirtschaftswachstum

*„Du kannst nicht immer das bekommen , was Du willst.“*  
(Mick Jagger)

**Mikroökonomie** handelt von **begrenzten Ressourcen**

z.B.: begrenztes Einkommen,  
begrenztes technisches Wissen,  
begrenzte Stundenanzahl,  
begrenzte Rohstoffe, etc.

Mikroökonomie untersucht die **Aufteilung der knappen Ressourcen**

z.B.: Aufteilung des Einkommens auf Konsumgüter,  
Aufteilung der Zeit auf Arbeit und Freizeit,  
Aufteilung der finanziellen Ressourcen von Unternehmen zum Ankauf  
von Produktionsfaktoren, etc.

Konsumenten:

*Konsumtheorie*: auf Grundlage der Präferenzen und Einkommensbeschränkungen der Konsumenten wird der Konsum bestimmt.

Wie entscheiden Konsumenten über Konsum und Sparen?

Unternehmen (Firmen):

Welche Produkte sollen produziert werden ?

Welche Produktionsfaktoren sollen eingesetzt werden ?

*Theorie der Unternehmung*

Konsumenten und Unternehmen sind mit **Preisen** konfrontiert.

In der Mikroökonomie wird beschrieben, **wie die Preise bestimmt werden.**

In einer Marktwirtschaft werden die Preise durch die *Interaktion zwischen Konsumenten und Unternehmen* bestimmt!

Die **mikroökonomische Analyse**:

**Theorien** werden verwendet um beobachtete Phänomene als eine Reihe von Grundregeln und Annahmen zu formulieren.

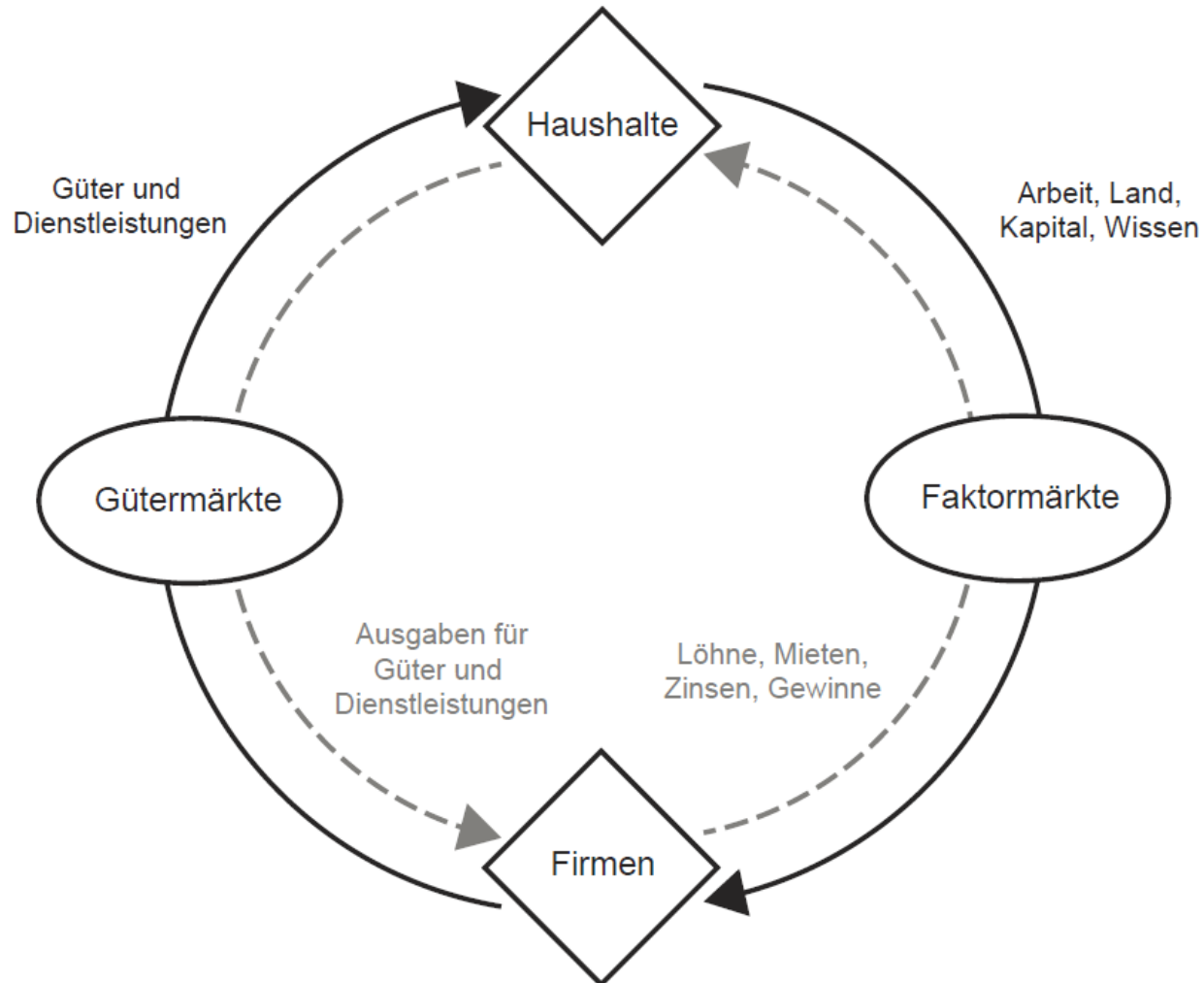
z.B.: Die Konsumtheorie, die Theorie der Unternehmung

Die mathematische Darstellung der Theorie erfolgt in **Modellen** welche zur Prognostizierung eingesetzt werden.

Die Gültigkeit einer Theorie wird durch die Qualität ihrer **Prognose** bei den gegebenen Annahmen bestimmt.

Die Überprüfung und Verbesserung der Theorien ist ein zentraler Bestandteil der Entwicklung der Volkswirtschaftslehre als Wissenschaft!

## zirkuläre Flüsse in der Marktwirtschaft



## Makroökonomie:

die einzelnen Wirtschaftssubjekte (private Haushalte, öffentliche Haushalte, private Unternehmen) werden zu **Sektoren** zusammengefasst

Betrachtung des **gesamtwirtschaftlichen Konsums**, der **gesamtwirtschaftliche privaten Investitionen**, etc.

es werden **gesamtwirtschaftliche Preisindizes** (z.B. Verbraucherpreisindex) gemessen.



→ Ökonomische Grundbegriffe

Mikroökonomie

→ Angebot und Nachfrage

→ Nutzenmaximierung

→ Profitmaximierung

Makroökonomie

→ Wirtschaftswachstum

## Die Angebotskurve:

welche Menge eines Gutes die Produzenten zu einem bestimmten Preis zu verkaufen bereit sind, wobei alle anderen Faktoren, welche die angebotene Menge beeinflussen, konstant gehalten werden (*ceteris paribus*).

Preis-Mengen-Beziehung:  $Q_S = Q_S(P)$

## Gesetz des Angebots:

Je höher der Preis eines Gutes, umso größer ist die angebotene Menge (*ceteris paribus*). D.h. die Angebotskurve ist positiv geneigt

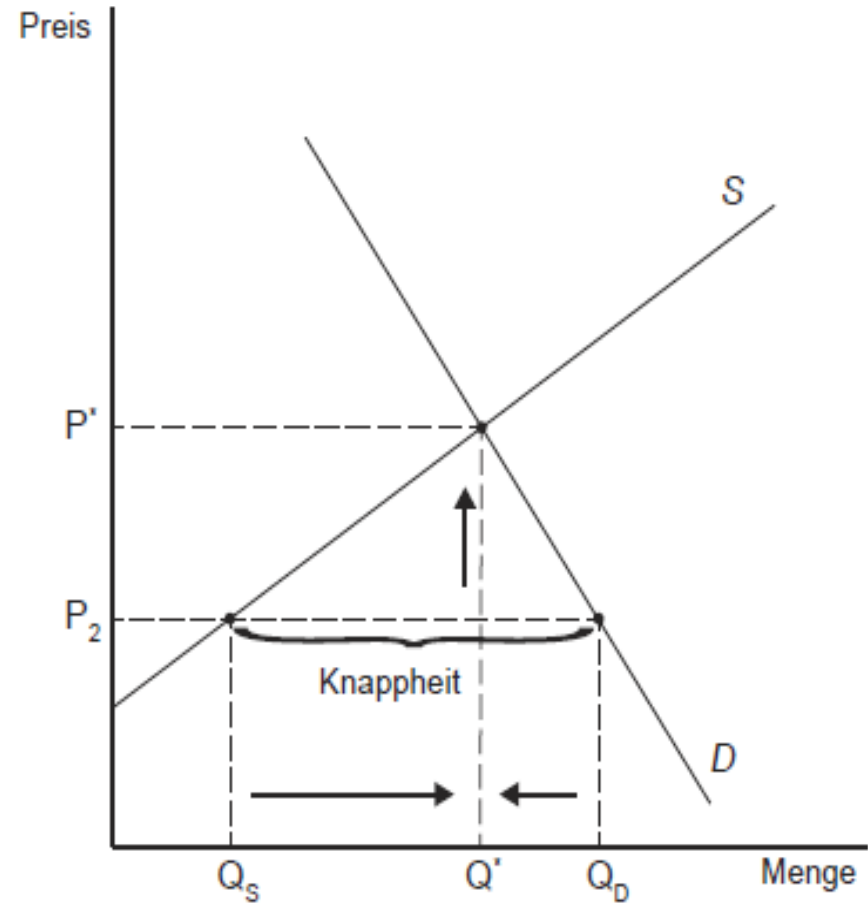
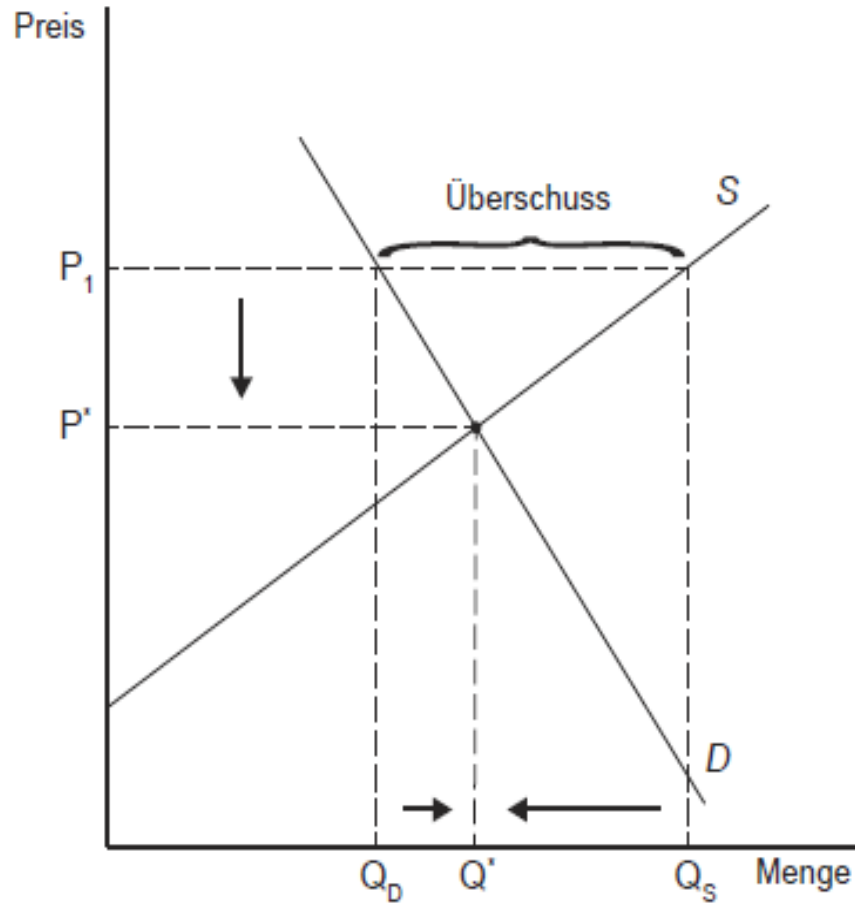
## Die Nachfragekurve:

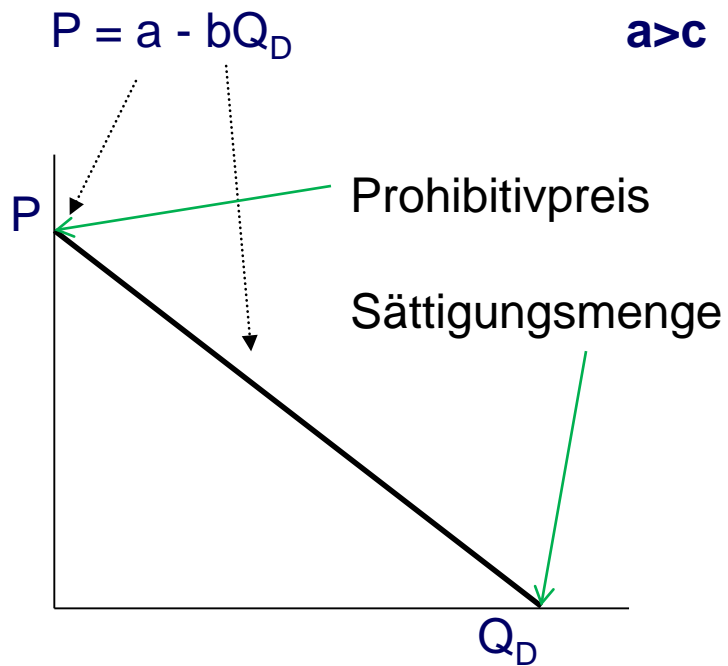
Die Nachfragekurve gibt an, welche Menge eines Gutes die Konsumenten bei einer Änderung des Preises pro Einheit zu kaufen bereit sind, wobei die anderen Faktoren als der Preis konstant gehalten werden (*ceteris paribus*).

Preis-Mengen-Beziehung:  $Q_D = Q_D(P)$

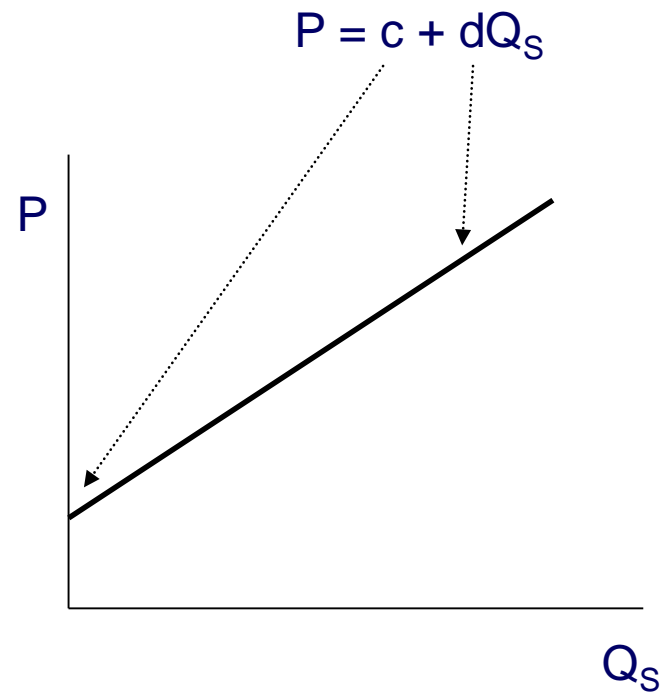
## Gesetz der Nachfrage:

Eine Erhöhung des Preises eines Gutes führt zu einer kleineren **Nachfragemenge** (*ceteris paribus*). d.h. die Nachfragekurve ist negativ geneigt





NACHFRAGE



ANGEBOT

## Marktgleichgewicht

$$Q_D = Q_S = Q^*$$

$$a - b Q^* = c + d Q^* \rightarrow Q^* = (a-c)/(b+d)$$

$$P^* = a - b (a-c)/(b+d) = (ad+bc)/(b+d)$$

## Stabilität eines Marktgleichgewichts

$$E(P) = Q^D(P) - Q^S(P)$$

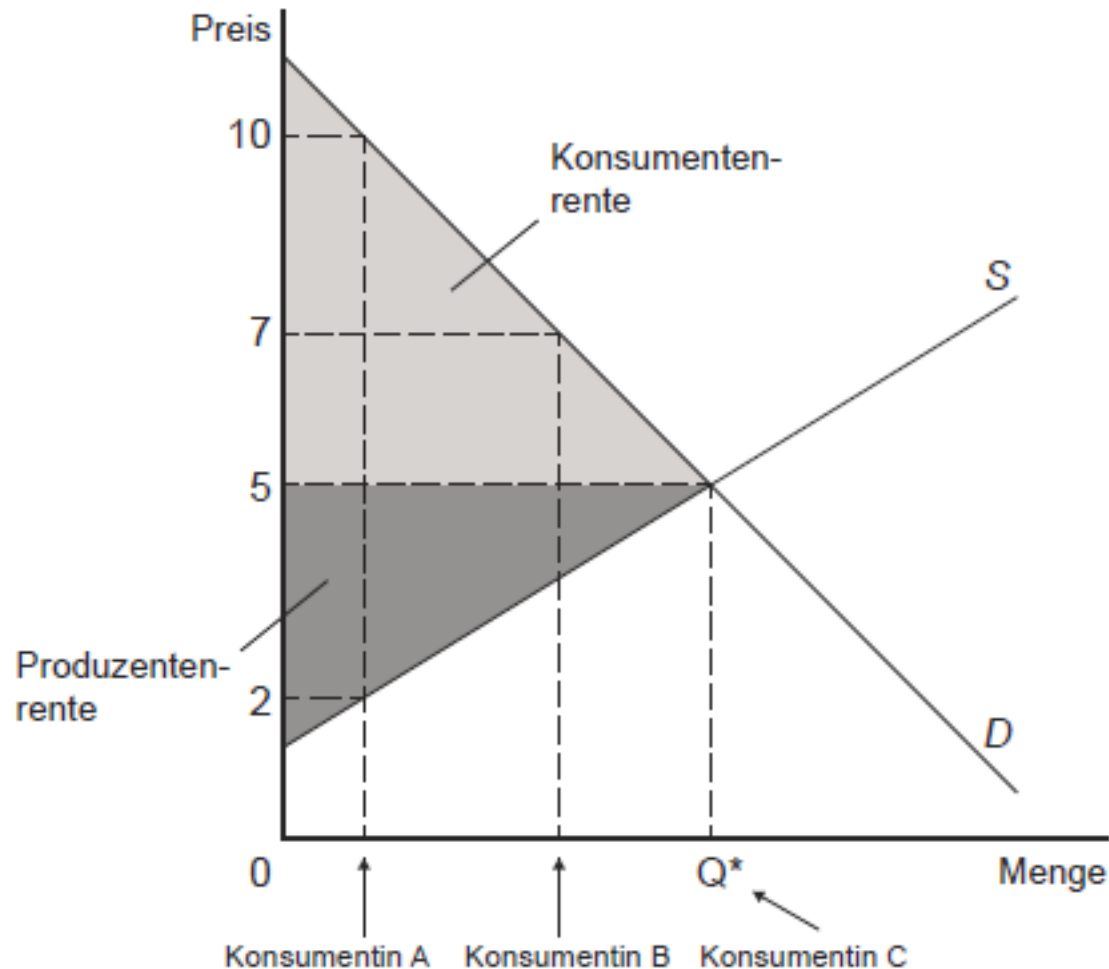
$$\text{wobei: } Q^D(P) = (a/b) - P/b$$

$$Q^S(P) = -(c/d) + P/d$$

$$dE(P)/dP = dQ^D(P)/dP - dQ^S(P)/dP < 0$$

# Angebot und Nachfrage

Im Marktgleichgewicht wird die Summe aus **Konsumenten-** und **Produzentenrente** maximiert.



## Beweis (Parameterintegral):

$$K\mathcal{R}(q) + P\mathcal{R}(q)$$

$$[p^D(q) - p^*] + [p^* - p^S(q)] = p^D(q) - p^S(q)$$

$$\max_q \int_0^q [p^D(\tilde{q}) - p^S(\tilde{q})] d\tilde{q}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} \int_0^q [p^D(\tilde{q}) - p^S(\tilde{q})] d\tilde{q} &= \int_0^q \frac{\partial}{\partial q} [p^D(\tilde{q}) - p^S(\tilde{q})] d\tilde{q} + \\ &\quad [p^D(q) - p^S(q)] \frac{d}{dq} q - \\ &\quad [p^D(0) - p^S(0)] \frac{d}{dq} 0 = 0 \end{aligned}$$

$$p^D(q^*) - p^S(q^*) = 0 \Rightarrow p^D(q^*) = p^S(q^*)$$



Die **Preiselastizität der Nachfrage/Angebots** ist ein dimensionsloses Maß für die Sensitivität der nachgefragten/angebotenen Menge wenn sich der Preis ändert und alle anderen Bestimmungsfaktoren der NF unverändert bleiben.

$$\frac{\Delta Q/Q}{\Delta P/P} = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \frac{P}{Q}$$

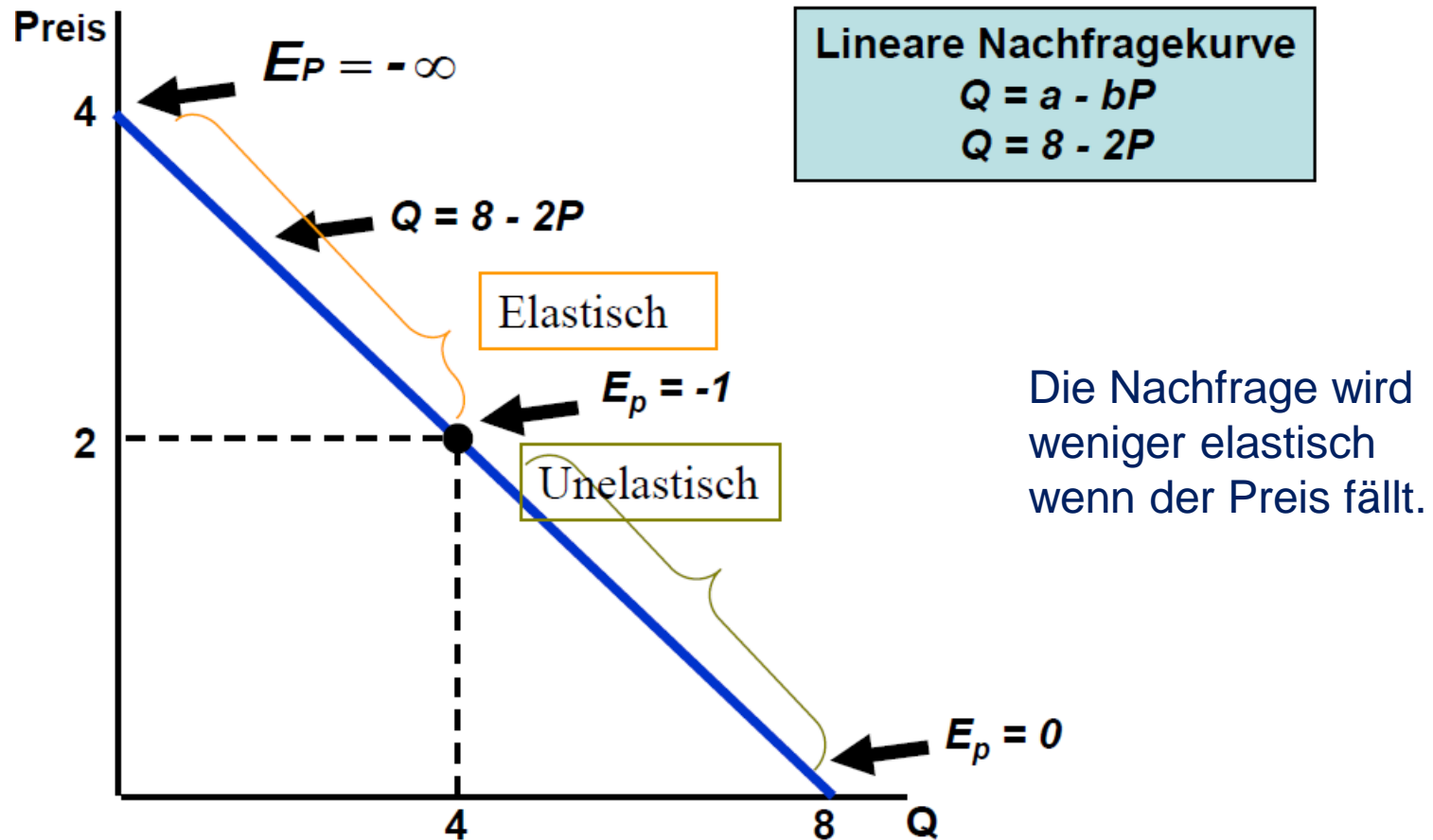
$$\frac{dQ/Q}{dP/P} = \frac{d \ln Q}{d \ln P}$$

$|E_P| > 1$  : die prozentuale Änderung der Menge ist größer als die prozentuale Änderung des Preises → **preiselastisch**

$|E_P| < 1$  : die prozentuale Änderung der Menge ist niedriger als die prozentuale Änderung des Preises → **preisunelastisch**

# Angebot und Nachfrage

## Elastizität entlang einer linearen Nachfrage-Kurve



## Beispiele (exemplarisch aus Hamilton und Suslow 2009):

1. Wenn die Elastizität des Angebots bei  $P = €12$  und  $Q = 15.000$  gleich 4 ist, wie lautet die Gleichung der Angebotskurve?

Bestimmen Sie auf Basis dieser Angebotskurve und der Nachfragekurve  $Q_D = 105000 - 7500 P$  den Gleichgewichtspreis und die Gleichgewichtsmenge.

Wie lautet der neue Gleichgewichtspreis und die neue Gleichgewichtsmenge, wenn sich das Angebot bei jedem Preis um 20 Prozent erhöht?

2. Die Nachfrage nach Milch wird durch  $Q_D = 152 - 20 P$  und das Angebot durch  $Q_S = -4 + 188 P$  gegeben. Berechnen Sie den Gleichgewichtspreis und die Gleichgewichtsmenge sowie die Gesamtrente. Wie verändert sich die Gesamtrente bei einem Preis von  $P = 1$ ?

3. Zeichnen Sie zwei gerade parallele Nachfragekurven. Danach zeichnen Sie eine positiv geneigte Gerade durch den Ursprung, die beide Kurven schneidet. Vergleichen Sie die Elastizitäten in diesen beiden Schnittpunkten.

→ Ökonomische Grundbegriffe

Mikroökonomie

→ Angebot und Nachfrage

→ Nutzenmaximierung

→ Profitmaximierung

Makroökonomie

→ Wirtschaftswachstum

Die Analyse des **Konsumentenverhaltens**:

1. Konsumentenpräferenzen
2. Budgetbeschränkungen
3. Konsumentenpräferenzen und Budgetbeschränkungen bestimmen Verbraucherentscheidungen

Präferenz entspricht dem mathematischen Konzept einer **binären Relation** auf der Menge aller Konsumgüterbündel.

Rangordnung der Güterbündel wird durch folgende Eigenschaften beschrieben:

(a) **Vollständigkeit**

Für alle Güterbündel gilt  $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$  oder  $(y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)$   
oder beides im Fall von Indifferenz.

(b) **Reflexivität**

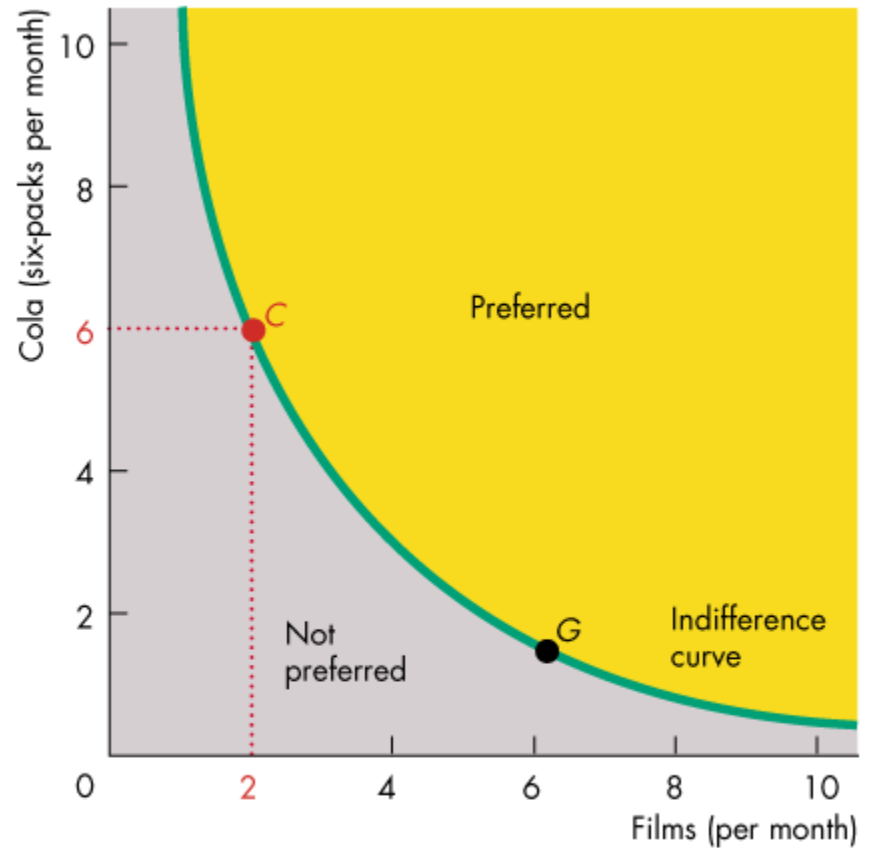
Jedes Bündel ist mindestens so gut wie es selbst.  $(x_1, x_2) \succeq (x_1, x_2)$

Ad (c) **Transitivität**

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &\succeq (y_1, y_2) \\ (y_1, y_2) &\succeq (z_1, z_2) \Rightarrow \\ (x_1, x_2) &\succeq (z_1, z_2) \end{aligned}$$

Indifferenzkurven sind eine Möglichkeit Präferenzen darzustellen.

Die Indifferenzkurve durch das Konsumbündel C besteht aus allen Güterbündel, die zu C indifferent sind.



(a) An indifference curve

## Nutzenfunktionen

Nutzen wird als eine Möglichkeit gesehen die Präferenzen zu beschreiben, d.h. eine mathematische Repräsentation der Präferenzen.

$$x \succ y \Rightarrow u(x) > u(y)$$

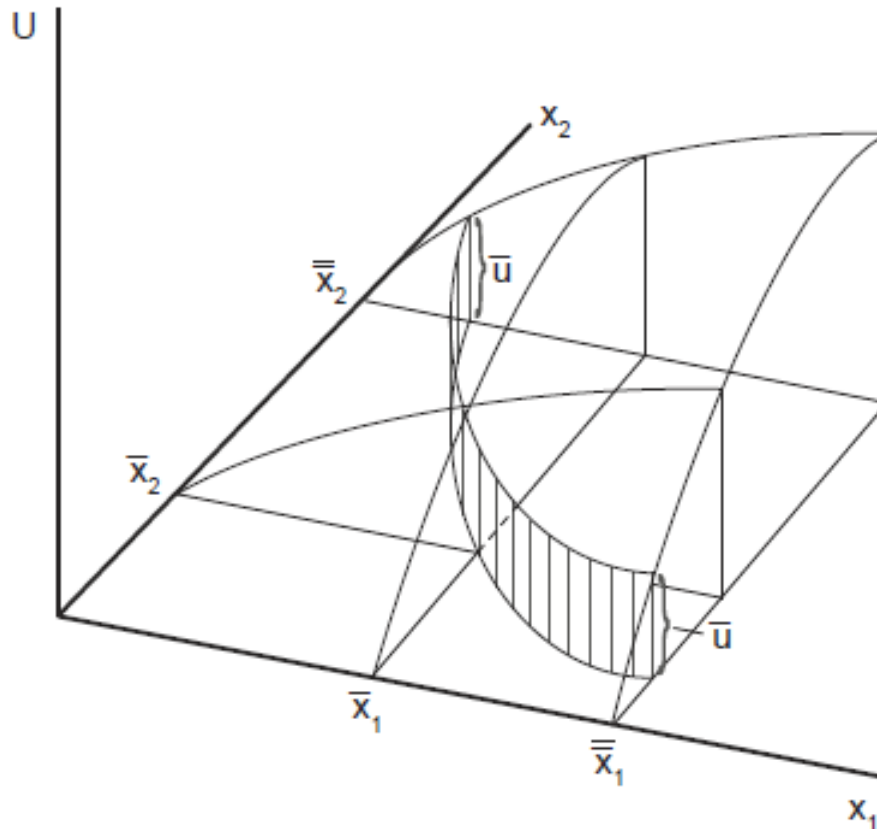
$$x \sim y \Rightarrow u(x) = u(y)$$

Durch die Nutzenfunktion wird jedem Konsumbündel eine **Zahl zugeordnet**, wobei bevorzugten Bündel höhere Zahlen zugewiesen werden.



Ausgehend von einer Nutzenfunktion können die **Indifferenzkurven** gezeichnet werden.

Man zeichnet alle Punkte  $(x_1, x_2)$ , sodass  $u(x_1, x_2)$  konstant bleibt, d.h. ein Schnitt des Nutzengebirges parallel zur Grundfläche.



## Budgetgleichung

Ausgaben = Einkommen

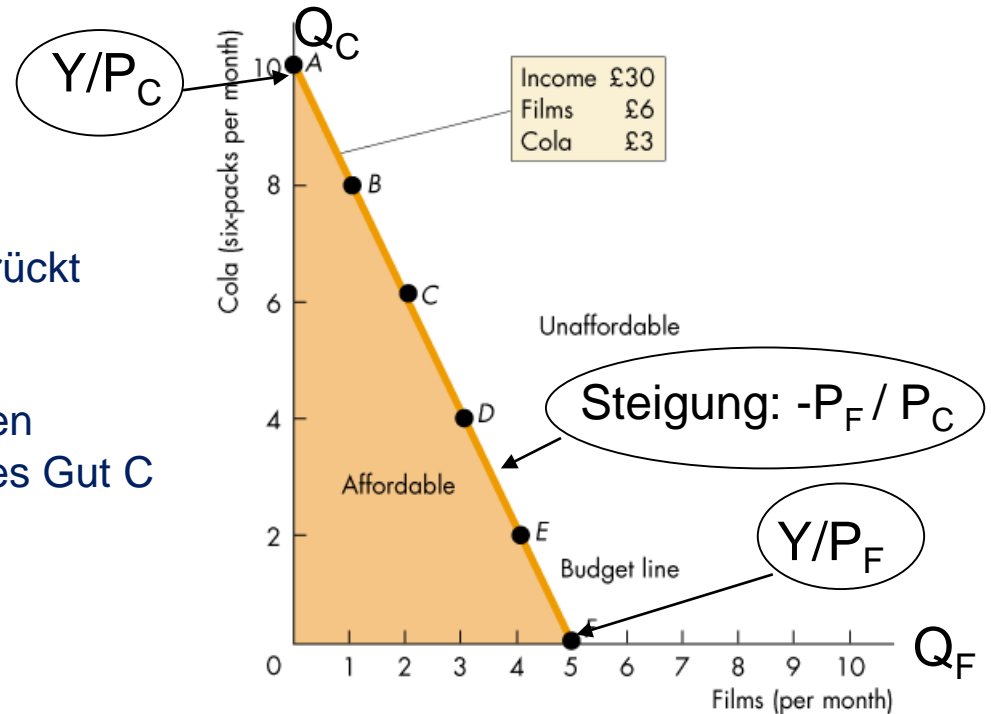
$Y/P_C$  reales Einkommen ausgedrückt  
in Einheiten des Gut C

$P_F/P_C$  relativer Preis der Kinokarten  
ausgedrückt in Einheiten des Gut C

$$P_C * Q_C + P_F * Q_F = Y$$

$$Q_C + (P_F / P_C) * Q_F = Y / P_C$$

$$Q_C = Y / P_C - (P_F / P_C) * Q_F$$



## Beispiel 1: Einkommen und Freizeit

$$\begin{aligned} \max_{C,L} U &= U(C, L) \\ \text{s. t. } L + N &= T \\ PC &= WN \end{aligned}$$

$L$  ... Freizeit  
 $N=T-L$  ... Arbeitszeit  
 $T$  ... zur Verfügung stehende Zeit

$$\max_N U = U\left(\frac{WN}{P}, T - N\right)$$

$$\frac{dU}{dN} = U_1\left(\frac{WN}{P}, T - N\right) \frac{W}{P} - U_2\left(\frac{WN}{P}, T - N\right) = 0 \quad \rightarrow \text{Arbeitsangebotsfunktion } N=N(W/P, T)$$

Grenznutzen einer zusätzlich angebotenen Einheit an Arbeit – gemessen durch den Grenznutzen einer daraus resultierenden zusätzlichen Konsumeinheit  $U_1 W/P$  – ist gleich den Grenzkosten – gemessen durch den marginalen Verlust an Freizeit  $U_2$

Hinreichende Bedingung:

$$\frac{d^2 U}{dN^2} = U_{11} \left(\frac{W}{P}\right)^2 - 2U_{12} \frac{W}{P} + U_{22} < 0$$

Beispiel 2:

Jane erzielt einen **Nutzen aus Reisetagen**, die sie mit einem Urlaub im Inland ( $D$ ) verbringt und aus Reisetagen, die sie mit einem Urlaub im Ausland ( $F$ ) verbringt, der durch die Nutzenfunktion  $U(D, F) = 10DF$  gegeben wird. Außerdem beträgt der Preis für einen Reisetag im Inland €100, und der Preis für einen Reisetag im Ausland beträgt €400. Janes jährliches Reisebudget beläuft sich auf €4.000.

- a) Zeichnen Sie die mit einem Nutzenniveau von 800 verbundene Indifferenzkurve sowie die mit einem Nutzenniveau von 1200 verbundene Indifferenzkurve.
- b) Zeichnen Sie Janes Budgetgerade in das gleiche Diagramm ein.
- c) Kann sich Jane den Kauf der Bündel, mit denen sie einen Nutzen von 800 erzielt, leisten? Wie gestaltet sich die Situation bei einem Nutzenniveau von 1200?
- d) Bestimmen Sie Janes nutzenmaximierende Wahl von Reisetagen im Inland und Reisetagen im Ausland.

→ Ökonomische Grundbegriffe

Mikroökonomie

→ Angebot und Nachfrage

→ Nutzenmaximierung

→ Profitmaximierung

Makroökonomie

→ Wirtschaftswachstum

Die Analyse des **Unternehmensverhaltens**:

1. Erlösfunktion
2. Kostenfunktion
3. Erlös- und Kostenfunktion bestimmen die **Produktionsmenge**

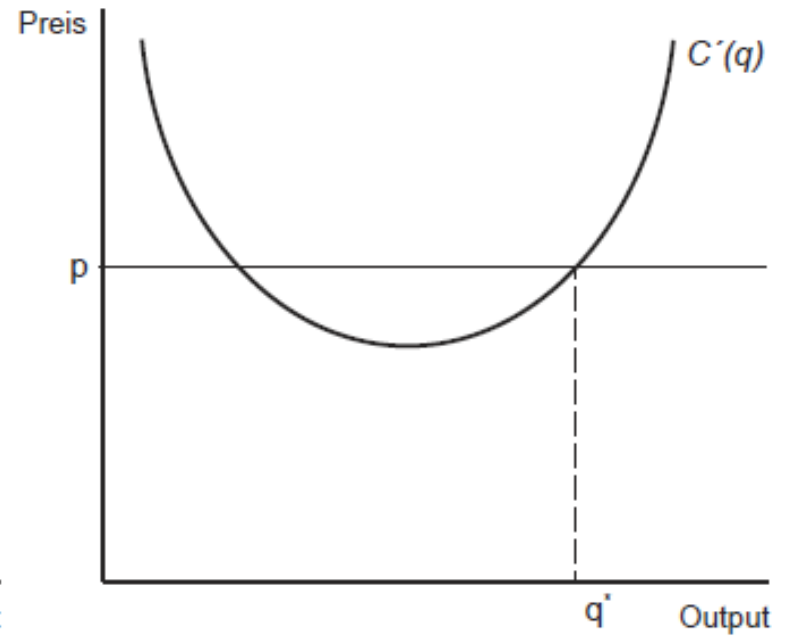
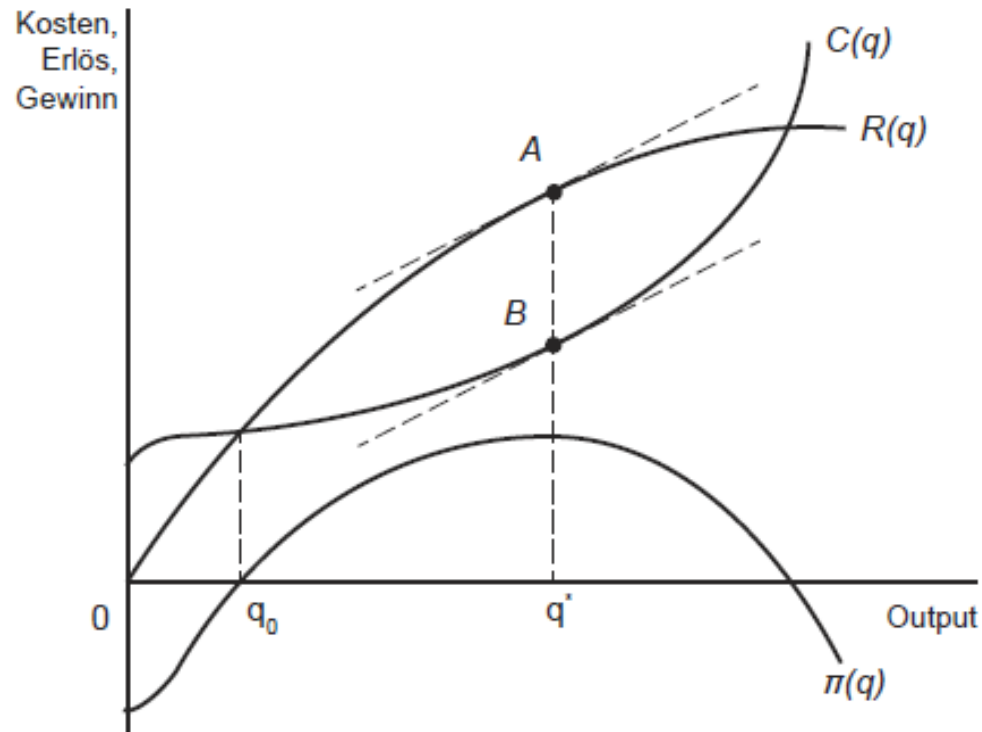
Marktform bestimmt Erlösfunktion !

## Vollständige Konkurrenz

$$\text{Gewinn (Profit) = Erlös (Umsatz) – Kosten} = R(q) - C(q) = p \cdot q - C(q)$$

Notwendige Bedingung:  $p = C'(q)$

Hinreichende Bedingung:  $- C''(q) < 0$





## Monopol

Gewinn (Profit) = Erlös (Umsatz) – Kosten =

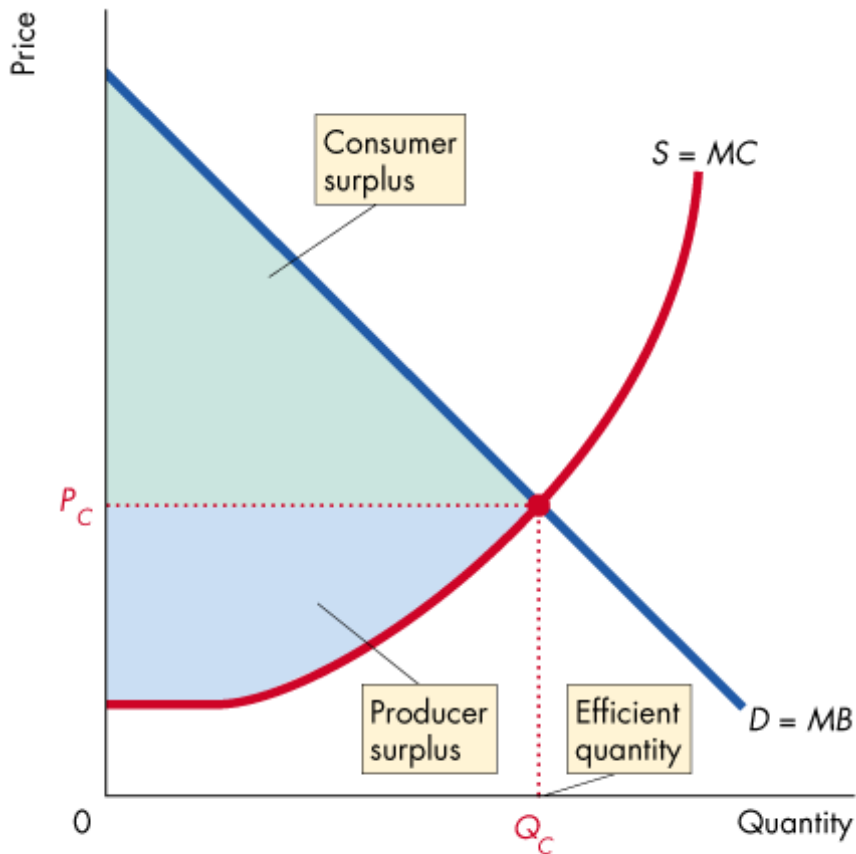
$$p(q) \cdot q - C(q)$$

Notwendige Bedingung:  $p(q) + q \cdot dp/dq = C'(q)$

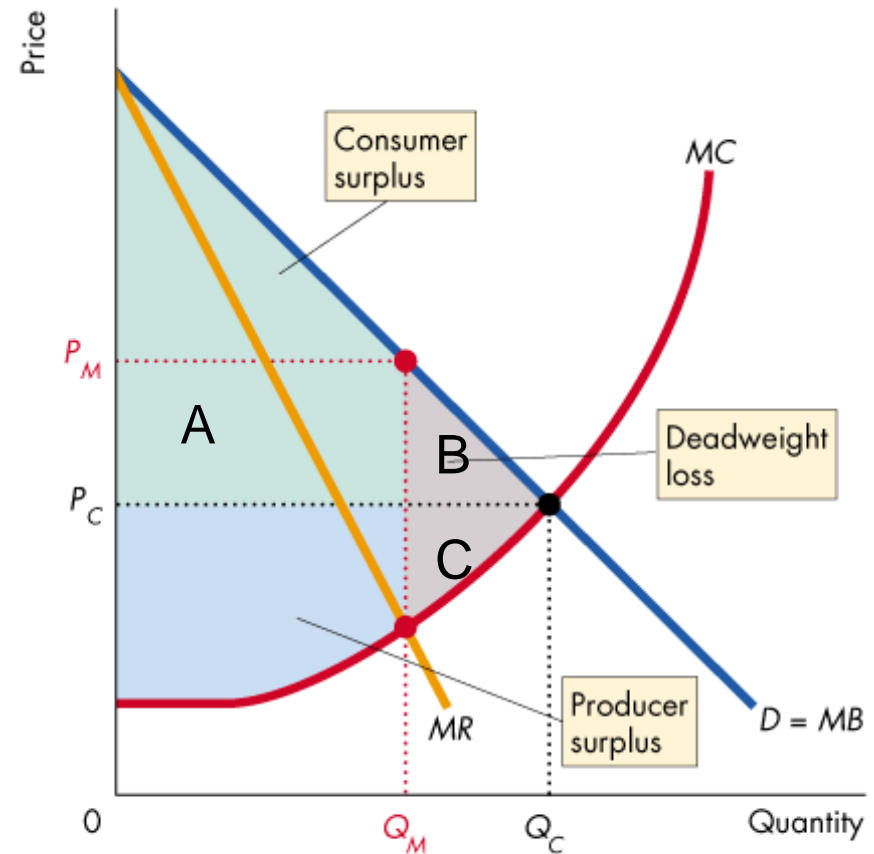
→ Gesellschaftliche Kosten der Monopolmacht !

Maximierung von Konsumenten- und Produzentenrente auf einem Wettbewerbsmarkt

Die Konsumenten verlieren A+B  
Die Produzenten gewinnen A und verlieren C  
Der Nettowohlfahrtsverlust ist B+C



(a) Perfect competition



(b) Monopoly

Beispiel 1:

Nehmen Sie an, Sie sind der Geschäftsführer eines Unternehmens, das auf einem Wettbewerbsmarkt Uhren herstellt. Ihre Produktionskosten werden durch  $C = 200 + 2q^2$  gegeben, wobei  $q$  das Produktionsniveau und  $C$  die Gesamtkosten sind.

- a) Wenn der Preis der Uhren €100 beträgt, wie viele Uhren sollten Sie zur Gewinnmaximierung herstellen?
- b) Wie hoch ist das Gewinnniveau (der Gewinn)?

## Beispiel 2:

Dayna's Doorstops Inc. (DD) ist ein Monopolist in der Türstopperindustrie. Die Kosten des Unternehmens liegen bei  $C = 100 - 5Q + Q^2$ , und die Nachfrage ist  $P = 55 - 2Q$ .

- a) Welchen Preis sollte DD wählen, um seine Gewinne zu maximieren? Welche Menge produziert das Unternehmen? Wie hoch ist der Gewinn und die Konsumentenrente, die DD erwirtschaftet?
- a) Wie hoch wäre die produzierte Menge, wenn DD auf einem vollkommenen Wettbewerbsmarkt agieren und  $GK = P$  ansetzen würde? Wie hoch wären dann Gewinn und Konsumentenrente?
- c) Wie hoch ist der Wohlfahrtsverlust (Deadweight-Verlust) aufgrund der Monopolmacht in Teil (a)?
- d) Nehmen wir an, der Staat ist über das hohe Preisniveau bei Türstoppern besorgt und setzt eine Preisobergrenze von €27 fest. Wie wirkt sich dies auf Preis, Menge, Konsumentenrente und den erzielten Gewinn aus? Wie hoch ist der Deadweight-Verlust, der sich daraus ergibt?
- e) Nehmen wir nun an, der Staat setzt die Preisobergrenze bei €23 fest. Wie wirkt sich dies auf Preis, Menge, Konsumentenrente, den Gewinn von DD und den Deadweight-Verlust aus?
- f) Nehmen wir schließlich noch eine Preisobergrenze von €12 an. Wie hoch sind bei diesem Preis Menge, Konsumentenrente, Gewinn und Deadweight-Verlust?

→ Ökonomische Grundbegriffe

Mikroökonomie

→ Angebot und Nachfrage

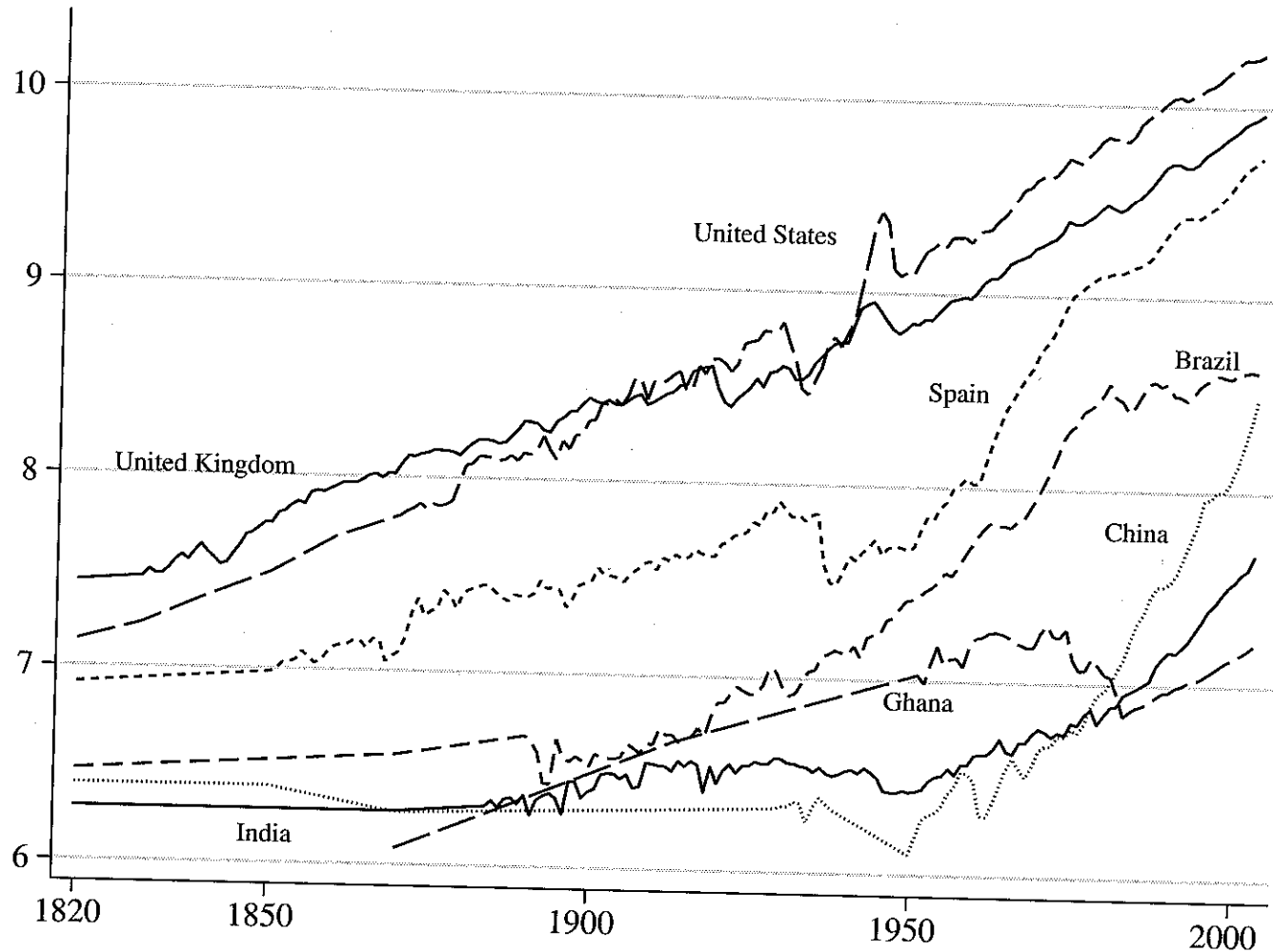
→ Nutzenmaximierung

→ Profitmaximierung

Makroökonomie

→ Wirtschaftswachstum

Log GDP per capita



## Solow-Swan Wachstumsmodell

$Y(t) = F(K(t), L(t))$       **Produktionsfunktion** (Y) in Abhängigkeit von  
Kapital (K) und Arbeitskraft (L)

### Kapitalakkumulationsgleichung

$$K(t+1) = (1-\delta) K(t) + I(t)$$

$$Y(t) = C(t) + I(t)$$

$$K(t+1) = (1-\delta) K(t) + F(K(t), L(t)) - C(t)$$

$$S(t) = I(t) = Y(t) - C(t)$$

$$S(t) = s Y(t)$$

$$C(t) = (1-s) Y(t)$$

$$K(t+1) = (1-\delta) K(t) + s F(K(t), L(t)) ; \quad k(t) = K(t) / L(t)$$

$$k(t+1) = (1-\delta) k(t) + s f(k(t))$$

