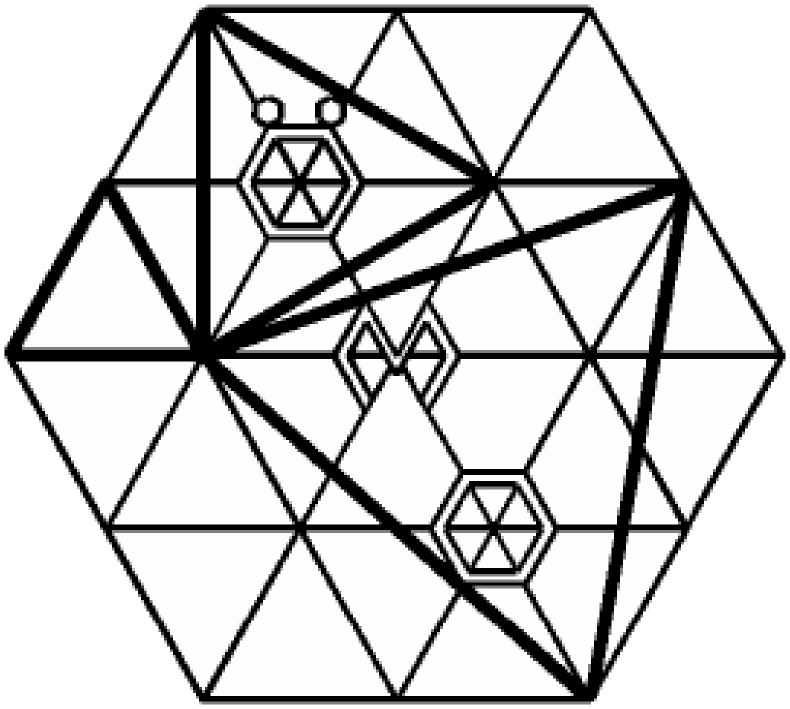
Mathematik-Olympiade



Mathematik-Olympiade

- Geschichte
- Organisation
- Gliederung (LWA, GWF,…)
- Aufgabe des/r Kursleiters/in
- Themen
- Schwierigkeiten & Vorteile
- Ausgewählte Beispiele

Geschichte

- 1959 Rumänien: 52 Schüler aus 7 Ländern
- 1968 1. Einladung an Österreich von UDSSR
- 1968 u. 1969 Beobachter zu den Wettbewerben
- Vorbereitungskurse
- 1970 1. österreichische Mathematik-Olympiade
- 1976 Österreich Gastgeberland

Geschichte IMO

- 2017 Rio de Janeiro: 111Länder - 615; 62♀ Schüler/innen
- 2018 – Cluj-Napoca (Rumänien)

  2019 – Bath (Vereinigtes Königreich)

  2020 – Russland

  2021 – Vereinigte Staaten

  2022 – Norwegen

ÖPMW, MEMO, EGMO

- ÖPMW: 1978 – 2006 abwechselnd in Österreich und Polen
- 2007 Gastgeber Österreich: Kroatien, Polen, Schweiz, Slowakei, Slowenien,Tschechien Deutschland und Ungarn Beobachter.
- 2016 Gastgeber Österreich
- EUROPEAN GIRLS OLYMPIAD

Sommerschulen

- Mathematical Summer in Paris:

16. Juli bis 27. Juli in Paris: https://msp.math.ens.fr/

- PROMYS Europe, 15. Juli bis 25. August 2018

  in Oxford: http://www.promys-europe.org/

- Summer School Mathematik der Universität Wien,

gemeinsam mit der Universität Innsbruck, 19. bis 25. August 2017
in Saalbach Hinterglemm:

- http://mathematik.univie.ac.at/mathe-studieren/infos-fuer-schuelerinnen/aktivitaeten-fuer-schuelerinne

Gerhard Kirchner

Organisation

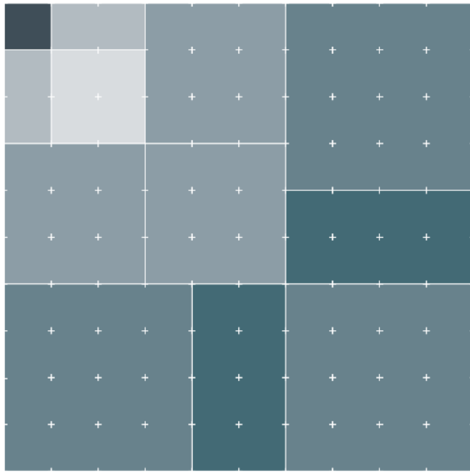
- Wissenschaftlicher Leiter: Clemens Heuberger (clemens.heuberger@aau.at)
- Bundeskoordinator: Gerhard Kirchner (g.kirchner@chello.at)
- 8 LandeskoordinatorInnen

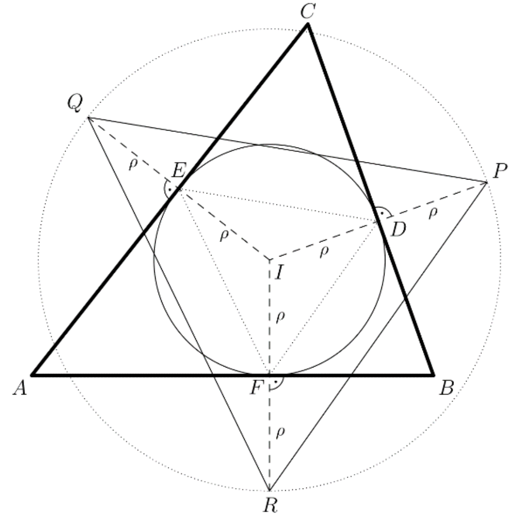
  Für NÖ: Gerlinde Faustmann
- Zentrale Anlaufstelle mit allen Informationen: https://www.math.aau.at/OeMO/
- 1x/Jahr Seminar für Kursleiter/innen

Termine

- Kurswettbewerb / Qualifikationswettbewerb Fortgeschrittene: bis 16. 3. 2018
- Gebietswettbewerb Fortgeschrittene: 5.4. 2018 (Raach)
- 7. Europäische Mädchen-Mathematik-Olympiade: 9.4.-15.4.2018 (Florenz)
- Vorbereitungskurs für Bundeswettbewerb (Raach) 1. Teil: 19. 4. - 28. 4. 2018
- Bundeswettbewerb Fortgeschrittene 1. Teil: 28. 4. 2018
- Vorbereitungskurs für Bundeswettbewerb (Raach) 2. Teil: 22. 5. - 2. 6. 2018
- Bundeswettbewerb Fortgeschrittene 2. Teil: 31. 5. bis 1. 6. 2018
- Kurswettbewerb Anfänger: bis 25. 5. 2018
- Landeswettbewerb Anfänger: 12. 6. 2018 (Wien)
- 59. IMO: 7. 7. - 14. 7. 2018 in Cluj-Napoca, Rumänien
- 12. MEMO: in Polen

Vorbereitung





AHS u. BHS 2 Wochenstunden: Anfänger: 4. Klasse – 6. Klasse

Fortgeschrittene: ab 7. Klasse (od. ab 5. Kl.)

- Kurswettbewerb bzw. Qualifikationswettbewerb

Aufgaben des Kursleiters/der Kursleiterin

- Zahlentheorie
- Ungleichungen
- Gleichungen + Gleichungssysteme
- Geometrie
- Kombinatorik
- Folgen und Reihen

- Kurswettbewerbe

Zahlentheorie

- **Fundamentalsatz der Zahlentheorie:** jede Zahl in Primfaktoren zerlegen
- **Teilbarkeit**: Kongruenzen, gerade, ungerade, ggT-Euklid. Algorithmus, kgV
- **Quadratzahlen**: denke an geeigneten Modul – alle Restklassen durchprobieren

  Dreieckszahlen – pythagoräische Tripel
- **Kubikzahlen**: Differenz aufeinander folgender Quadratzahlen
- **Kleiner Fermat**
- **Induktion**

Zahlentheorie

- Beweise, dass $2^{2k} + 24k - 10$ für alle natürlichen Zahlen k durch 18 teilbar ist!
- Bew.: 2| zz. 9| vollst. Ind. nach k: A(1):

  A(k+1): $2^{2k}2^2+24k+24-10=A(k)+3\cdot2^{2k}+24\ldots.9|$
- Bestimme alle natürlichen Zahlen n, so dass

  $T(n) = 2^6 + 2^9 + 2^{n+3}$

  eine Quadratzahl ergibt!
  - $2^6 + 2^9 + 2^{n+3}=x^2$
  - $2^2(2^4+2^7+2^{n+1})=x^2$
  - $..(a+b)^2=2^2+2.2^2.2^4+2^8\ldots.$ **n=7**
- Für welche natürliche Zahl k ist

  $Z = 3^{198} - 3^{133} + k$ durch 343 teilbar?

Bsp. Zahlentheorie u. Gleichung

- (KWA 2010):
- Ermittle alle natürlichen Zahlen x, y sodass:
  - $(2x-4)(5y-15)=2010$
- L: $2(x-2)5(y-3) = 2.3.5.67$
- Koeffizientenvergleich: $x-2=3 \wedge y-3 = 67$ (5;70)
  - $x-2=67 \wedge y-3 = 3$ (69;6)
  - $x-2=1 \wedge y-3 = 3.67$ (3;204)
  - $x-2=3.67 \wedge y-3 = 1$ (203;4)
- L={(5,70), (69,6), (4,204); (203,4)}

Ungleichungen

- Denke vollständiges Quadrat ist immer größer gleich Null. **$(\ldots)^2 \geq 0$**

- Forme Ungleichung um bis eine Seite Null. Beachte Binom oder Trinom usw. in der Klammer:
- **Mittelungleichungen**: Denke, wenn Summen, Produkte bzw. Wurzeln oder Quadrate vorkommen:

Harmonisches Mittel≤geometrisches M. ≤arithmetisches M. ≤quadratisches M.

Beispiele zu Ungleichungen

- **Beweise: für alle**
- **$x \varepsilon R^+$: $x+4/x^2 \geq 3$**

- Beweis: $x^3+4-3x^2\geq 0$
- faktorisiere: $(x+1)(x^2-4x+4) \geq 0$
- $(x+1)(x-2)^2\geq 0$,
- beide Faktoren≥ 0

Beispiele zu Ungleichungen

a, b R: Beweise: $a^2+b^2+ab\geq 3(a+b-1)$,

- Idee: Bei 6 Summanden an Trinom denken:

  $\mathbf{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}$

- Idee: $c^2=3$, b^2 in 1/4 b^2 und 3/4 b^2 zerlegen!

- Falls 5 Summanden - kein Trinom möglich - in Summe von 2 Binomquadraten umformen.

Gleichungen und Gleichungssysteme (Anfänger)

- Grundmenge, Definitionsmenge, Lösungsmenge
- Lineare Gleichungen
- Quadratische Gleichungen
  - Lösungsformel
  - Vietasche Sätze
  - Diskriminante und Charakterisierung der Anzahl der reellen Lösungen
- Produkt–Null–Gleichungen: Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.
- Gleichungen mit rationalen Funktionen (Rationale Funktionen sind Quotienten von Polynomen.)
- Einfache Gleichungssysteme

Gleichungen und Gleichungssysteme

Man bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$a^2 = b \cdot (b+7)$$

mit ganzen Zahlen $a \geq 0$ *und* $b \geq 0$.

(LWA 2014)

Wegen $a^2 = b^2 + 7b$ und $b \geq 0$ gilt $a^2 \geq b^2$ und wegen $a \geq 0$ folgt $a \geq b$.

Es gibt also eine natürliche Zahl k mit $a = b + k$. Eingesetzt in die gegebene Gleichung ergibt das

$$(b+k)^2 - b(b+7) = 0$$

und damit

$$b = \frac{k^2}{7-2k}.$$

Da b nicht negativ sein darf, muss $k = 0$, 1, 2 oder 3 sein. Nur für $k = 0$ oder 3 ist b eine ganze Zahl, nämlich 0 bzw. 9. Für $b = 0$ erhält man $a = 0$ und für $b = 9$ erhält man $a = 12$. Damit erhält man die Lösungspaare $(a, b) = (0, 0)$ bzw. $(12, 9)$.

Geometrie (Anfänger)

- **Winkel:** Parallel-, Normal-, Komplementär-, Supplementärwinkel
- **Winkelsummen** (Dreieck, Viereck,…)
- **Strecken- und Winkelsymmetrale**
- **Strahlensatz**
- **Ähnliche Dreiecke**
- **Kongruente Dreiecke**
- **Merkwürdige Punkte im Dreieck**

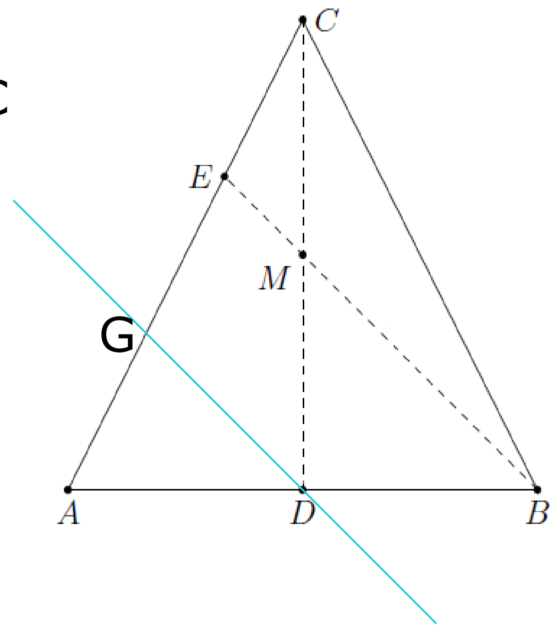
Geometrie (Anfänger)

- **Dreieck:**
  - Kongruenzsätze: SSS, SWS, SSW (größerer S. gegenüberl. W.)
  - Dreiecksungleichung: a+b>c, Winkelsumme,
  - Flächenformeln – trigonometr.
- **Satz von Thales**
- **Satzgruppe von Pythagoras:** Satz von Pythagoras, Höhensatz, Kathetensatz
- **Peripheriewinkelsatz inkl. Zentriwinkel**
- **Tangentenviereck:** Die Summe gegenüberliegender Seiten ist gleich. (U/2)
- **Sehnenviereck:** Die Summe gegenüberliegender Winkel ist gleich. (180°)

Geometrie - Beispiel

Im gleichschenkeligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist D der Fußpunkt der Höhe durch C und M der Mittelpunkt der Strecke CD. Die Gerade BM schneidet AC in E. Man beweise, dass AC dreimal so lang wie CE ist. (LWA 2017)

1. Parallele zu BE durch D, schneide mit AC => G
2. M Mittelpunkt von CD => E Mittelpunkt von GC (Strahlensatz)
3. Dreieck ABC gleichschenkelig, AB Basis => D Mittelpunkt von AB => G Mittelpunkt von AE (Strahlensatz)
4. => AG = GE = EC
5. => AC dreimal so lang wie EC



Kombinatorik

Gebietswettbewerb 2017 (Raach) – Beispiel 3b

Auf der Tafel stehen die drei natürlichen Zahlen 2017, 2000 und 17.

Anna und Berta spielen folgendes Spiel: Anna beginnt, dann sind sie abwechselnd am Zug. Ein Zug besteht darin, eine der drei Zahlen auf der Tafel durch den Betrag der Differenz der beiden anderen Zahlen zu ersetzen.

Dabei ist kein Zug erlaubt, bei dem sich keine der drei Zahlen verändert.

Wer an der Reihe ist und keinen erlaubten Zug mehr machen kann, hat verloren. Wer gewinnt?

von Stephan Leopoldseder

Kombinatorik

Anna, 1. Zug:

2017

2000

17

„Ersetze eine der drei Zahlen auf der Tafel durch den Betrag der Differenz der beiden anderen Zahlen.“

Kombinatorik

Anna, 1. Zug:

2017		**2000**	
2000	⇒	**1983**	**(=2000-17)**
17		**17**	

„Ersetze eine der drei Zahlen auf der Tafel durch den Betrag der Differenz der beiden anderen Zahlen."

Ist der Zug erlaubt? Ja!

„Dabei ist kein Zug erlaubt, bei dem sich keine der drei Zahlen verändert."

Kombinatorik

Anna, 1. Zug:

2017		**2017**	
2000	$\Rightarrow$	**2000**	**(=2017-17)**
17		**17**	

„Ersetze eine der drei Zahlen auf der Tafel durch den Betrag der Differenz der beiden anderen Zahlen.“

Ist der Zug erlaubt? Nein!

„Dabei ist kein Zug erlaubt, bei dem sich keine der drei Zahlen verändert.“

Kombinatorik

Anna, 1. Zug:

2017		**2017**	
2000	$\Rightarrow$	**2000**	
17		**17**	**(=2017-2000)**

„Ersetze eine der drei Zahlen auf der Tafel durch den Betrag der Differenz der beiden anderen Zahlen.“

Ist der Zug erlaubt? Nein!

„Dabei ist kein Zug erlaubt, bei dem sich keine der drei Zahlen verändert.“

Kombinatorik

Anna, 1. Zug:		**Berta, 2. Zug:**
2017		**2000**
2000	$\Rightarrow$	**1983**
17		**17**

Kombinatorik

Anna, 1. Zug:		Berta, 2. Zug:		Anna, 3. Zug:
2017		2000		1983
2000	$\Rightarrow$	1983	$\Rightarrow$	1966
17		17		17

Kombinatorik

Anna, 1. Zug:		Berta, 2. Zug:		Anna, 3. Zug:
2017		2000		1983
2000	$\Rightarrow$	1983	$\Rightarrow$	1966
17		17		17

Kombinatorik

Anna, 1. Zug:		Berta, 2. Zug:		Anna, 3. Zug:		Berta, 4. Z.:
2017		2000		1983		1966
2000	⇒	1983	⇒	1966	⇒	1949
17		17		17		17

Kombinatorik

Anna, 1. Zug:		Berta, 2. Zug:		Anna, 3. Zug:		Berta, 4. Z.:
2017		2000		1983		1966
2000	$\Rightarrow$	1983	$\Rightarrow$	1966	$\Rightarrow$	1949
17		17		17		17

Vermutung: Das geht so weiter…

Begründung:
Was passiert,
wenn a, b, a+b
auf der Tafel stehen?
(oBdA: a>b)

n-ter Zug:
a+b
a
b

Kombinatorik

Anna, 1. Zug:		Berta, 2. Zug:		Anna, 3. Zug:		Berta, 4. Z.:
2017		2000		1983		1966
2000	$\Rightarrow$	1983	$\Rightarrow$	1966	$\Rightarrow$	1949
17		17		17		17

Vermutung: Das geht so weiter…

Begründung:
Was passiert, wenn a, b, a+b auf der Tafel stehen? (oBdA: a>b)

n-ter Zug:

a+b		a		a
a	$\Rightarrow$	a-b	oder	b
b		b		a-b

Kombinatorik

Anna, 1. Zug:		Berta, 2. Zug:		Anna, 3. Zug:		Berta, 4. Z.:
2017		2000		1983		1966
2000	⇒	1983	⇒	1966	⇒	1949
17		17		17		17

Es gibt also immer nur einen erlaubten Zug!

Frage: Sollen wir alle Züge aufschreiben? …

Antwort: Lieber nein,	**2017 : 17 = 118**		**??, ??. Zug:**
wir wollen heute ja	**31**		**??**
auch noch erfahren,	**147**	⇒	**??**
wer gewonnen hat…	**11 Rest**		**??**

Anna, 1. Zug:		**Berta, 2. Zug:**		**Anna, 3. Zug:**		**Berta, 4. Z.:**
2017		**2000**		**1983**		**1966**
2000	$\Rightarrow$	**1983**	$\Rightarrow$	**1966**	$\Rightarrow$	**1949**
17		**17**		**17**		**17**

Es gibt also immer nur einen erlaubten Zug!

Frage: Sollen wir alle Züge aufschreiben? …

Antwort: Lieber nein,	**2017 : 17 = 118**		**??, ??. Zug:**
wir wollen heute ja	**31**		**??**
auch noch erfahren,	**147**	$\Rightarrow$	**??**
wer gewonnen hat…	**11 Rest**		**17**

Kombinatorik

Anna, 1. Zug:		Berta, 2. Zug:		Anna, 3. Zug:		Berta, 4. Z.:
2017		2000		1983		1966
2000	⇒	1983	⇒	1966	⇒	1949
17		17		17		17

Es gibt also immer nur einen erlaubten Zug!

Frage: Sollen wir alle Züge aufschreiben? …

Antwort: Lieber nein,	**2017 : 17 = 118**		**??, 118. Zug:**
wir wollen heute ja	**31**		**??**
auch noch erfahren,	**147**	⇒	**??**
wer gewonnen hat…	**11 Rest**		**17**

Kombinatorik

Anna, 1. Zug:		Berta, 2. Zug:		Anna, 3. Zug:		Berta, 4. Z.:
2017		2000		1983		1966
2000	$\Rightarrow$	1983	$\Rightarrow$	1966	$\Rightarrow$	1949
17		17		17		17

Es gibt also immer nur einen erlaubten Zug!

Frage: Sollen wir alle Züge aufschreiben? …

Antwort: Lieber nein, wir wollen heute ja auch noch erfahren, wer gewonnen hat…

2017 : 17 = 118		**Berta, 118. Zug:**
31		**??**
147	$\Rightarrow$	**??**
11 Rest		**17**

Kombinatorik

Anna, 1. Zug:		**Berta, 2. Zug:**		**Anna, 3. Zug:**		**Berta, 4. Z.:**
2017		**2000**		**1983**		**1966**
2000	$\Rightarrow$	**1983**	$\Rightarrow$	**1966**	$\Rightarrow$	**1949**
17		**17**		**17**		**17**

Es gibt also immer nur einen erlaubten Zug!

Frage: Sollen wir alle Züge aufschreiben? …

Antwort: Lieber nein,	**2017 : 17 = 118**		**Berta, 118. Zug:**
wir wollen heute ja	**31**		**??**
auch noch erfahren,	**147**	$\Rightarrow$	**11**
wer gewonnen hat…	**11 Rest**		**17**

Kombinatorik

Anna, 1. Zug:		Berta, 2. Zug:		Anna, 3. Zug:		Berta, 4. Z.:
2017		2000		1983		1966
2000	$\Rightarrow$	1983	$\Rightarrow$	1966	$\Rightarrow$	1949
17		17		17		17

Es gibt also immer nur einen erlaubten Zug!

Frage: Sollen wir alle Züge aufschreiben? …

Antwort: Lieber nein,	**2017 : 17 = 118**		**Berta, 118. Zug:**
wir wollen heute ja	**31**		**28**
auch noch erfahren,	**147**	$\Rightarrow$	**11**
wer gewonnen hat…	**11 Rest**		**17**

Kombinatorik

Anna, 1. Zug:		Berta, 2. Zug:		Anna, 3. Zug:		Berta, 4. Z.:
2017		2000		1983		1966
2000	$\Rightarrow$	1983	$\Rightarrow$	1966	$\Rightarrow$	1949
17		17		17		17

	Berta, 118. Zug:		Anna, 119. Zug:		Berta, 120. Zug:
	28		17		11
$\Rightarrow \cdots \Rightarrow$	17	$\Rightarrow$	11	$\Rightarrow$	6
	11		6		5

Kombinatorik

Anna, 121. Zug:		Berta, 122. Zug:		Anna, 123. Zug:
6		5		4
5	⇒	4	⇒	3
1		1		1

	Berta, 124. Zug:		Anna, 125. Zug:		Berta, 126. Zug:
	3		2		1
⇒	2	⇒	1	⇒	1
	1		1		0

Ist das Spiel jetzt aus? „Dabei ist kein Zug erlaubt, bei dem sich keine der drei Zahlen verändert.“

Kombinatorik

Anna, 125. Zug:

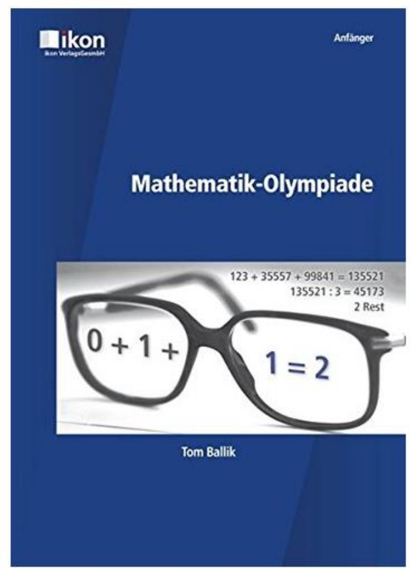
2		**1**
1	$\Rightarrow$	**1**
1		**0**

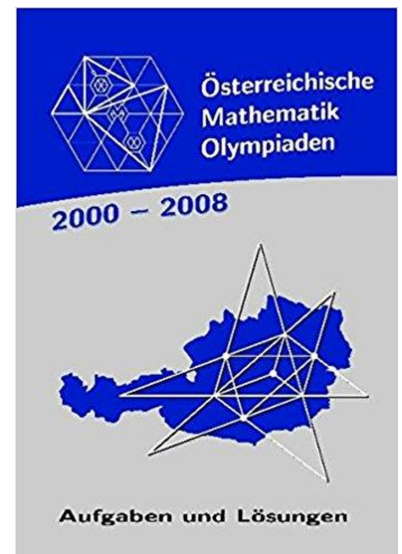
Berta verliert das Spiel, da sie keinen erlaubten 126. Zug machen kann.

Nach dem 125. Zug stehen nämlich die Zahlen 1, 1, 0 auf der Tafel.

Buchempfehlungen

- MATHEMATIK OLYMPIADE (ikon Mathematik) von Thomas Ballik
- Österreichische Mathematik Olympiaden 2000-2008 Taschenbuch von Gerd Baron, Birgit Vera Schmidt





+/-

+

- Zusätzliches Training
- Freundschaften
- Denksportaufgaben
- Begabungsförderung
- Blockung möglich

\-

- Start oft schwierig
    - Schüler finden
    - Einarbeitung notwendig

KWA

48. Mathematik-Olympiade
Kurswettbewerb für Anfänger
BRG-Gröhrmühlgasse 27, Wr. Neustadt
22. Mai 2017

1) Für welche natürlichen Zahlen x und y gilt:

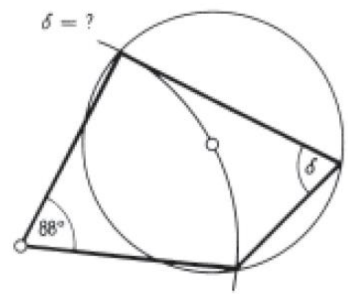
$$5xy^2 + 15y = 225$$

2) Beweise, dass folgende Ungleichung für alle reellen Zahlen a, b gilt:

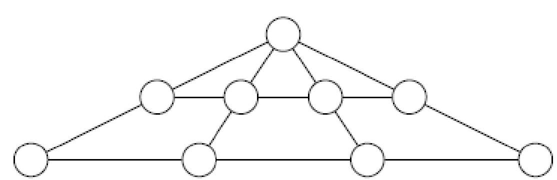
$$2a^2 + \frac{b^2}{2} + 1 \geq 2a + b$$

3) a) In einem rechtwinkeligen Dreieck ABC mit die Hypotenuse AC = 30 cm und der Kathete AB = 18 cm ist D der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale des $\angle CAB$ mit der Seite BC. E ist der Fußpunkt der Normalen auf AC durch D.
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks CDE!

b) Gib die Größe von δ an!



4) Beschrifte in folgender Figur die Felder mit den Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Jede Zahl soll 1-mal vorkommen und die Summe der Zahlen entlang der Verbindungsstrecken von oben nach unten soll jeweils gleich sein. (3 Zahlen). Die Summe der Zahlen in den waagrechten Zeilen soll auch gleich sein. Wie viele Beschriftungsmöglichkeiten gibt es?



1. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_9$ nicht negative reelle Zahlen, für die gilt:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_9^2 \geq 25$$

Man beweise, dass es drei dieser Zahlen gibt, deren Summe mindestens 5 ist.

(Karl Czakler)

2. Es sei $ABCD$ ein konvexes Sehnenviereck mit dem Umkreismittelpunkt U, in dem die Diagonalen aufeinander normal stehen. Es sei g die Gerade, die man erhält, wenn man die Diagonale AC an der Winkelsymmetrale von $\sphericalangle BAD$ spiegelt.

Man zeige, dass der Punkt U auf der Geraden g liegt.

(Theresia Eisenkölbl)

3. Auf der Tafel stehen die drei natürlichen Zahlen 2000, 17 und n. Anna und Berta spielen folgendes Spiel: Anna beginnt, dann sind sie abwechselnd am Zug. Ein Zug besteht darin, eine der drei Zahlen auf der Tafel durch den Betrag der Differenz der beiden anderen Zahlen zu ersetzen. Dabei ist kein Zug erlaubt, bei dem sich keine der drei Zahlen verändert. Wer an der Reihe ist und keinen erlaubten Zug mehr machen kann, hat verloren.

   - Man beweise, dass das Spiel für jedes n irgendwann zu Ende geht.
   - Wer gewinnt, wenn $n = 2017$ ist?

(Richard Henner)

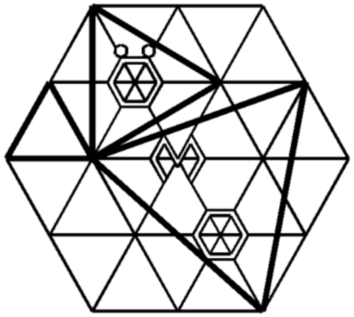
4. Man bestimme alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$, für die

$$n = a^2 + b^2$$

gilt, wobei a der kleinste von 1 verschiedene Teiler von n und b ein beliebiger Teiler von n ist.

(Walther Janous)

Danke für die Aufmerksamkeit!



Gerlinde Faustmann: gerlinde.faustmann@aon.at
Christian Wurzer: christian.wurzer@keimgasse.at